

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. X, N. 9

Serie nona

1° Settembre 1953

Sul problema della separabilità delle variabili.

A. CARRELLI.

Istituto di Fisica dell'Università - Napoli

(ricevuto il 6 Giugno 1953)

Riassunto. — In questa Nota, ricordato il classico caso della separabilità delle variabili di Liouville, si analizza quello di Stäckel mostrando come esso s'incontri nel caso dell'effetto Stark, e se ne dà l'interpretazione ondulatoria. Esaminando poi le ulteriori ricerche in questo campo della Meccanica Analitica che hanno portato, per opera dell'AGOSTINELLI, alla risoluzione completa del problema della separabilità, si fa vedere, nel caso trattato da LEVI-CIVITA, l'analogia geometrica fra questo caso già molto generale e quello classico.

Com'è ben noto nelle applicazioni della meccanica analitica della teoria quantistica il problema della separabilità delle variabili è problema fondamentale. La trattazione di una questione di meccanica ondulatoria è legata alla possibilità o meno che le coordinate impiegate rendano il problema separabile. Il caso che normalmente si presenta è quello di Liouville. Indicando con A_k e B_k funzioni della sola q_k ($k = 1, \dots, f$) si verifica tale caso quando l'energia cinetica T e l'energia potenziale U si presentano sotto la forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_k A_k q_k^2, \quad U = \frac{1}{b} \sum_k U_k(q_k), \quad b = \sum_k B_k.$$

Indicando con π_k f costanti arbitrarie, fra le quali sussiste però la relazione $\sum_k \pi_k = 0$ i momenti p_k coniugati delle q_k soddisfano alle relazioni

$$\frac{1}{2} A_k p_k^2 + U_k - E B_k = \pi_k.$$

Da queste nel caso particolare che $A_k = m$; $B_k = 1$ con la posizione

$$p_k^2 = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2 m} \frac{\partial^2}{\partial q_k^2},$$

si passa subito ad f equazioni di Schrödinger.

Ma oltre al caso di Liouville si presenta un altro caso molto interessante di separabilità: quello di Stäckel. Dette $y_{\lambda k}(q_k)$ ($\lambda, k = 1, \dots, f$) f^2 funzioni delle q_k , sia D il determinante formato da queste f^2 funzioni; si considerino ora le funzioni z_k in numero di f ($k = 1, \dots, f$) che sono i reciproci degli elementi della linea f -esima di questo determinante (e cioè $\sum_k z_k y_{fk} = 1$), e la $H(p, q)$ del sistema sia della forma seguente

$$\sum_k z_k \left[\frac{1}{2m} p_k^2 - U_k \right] = E,$$

con le U_k funzioni della sola q_k (mentre z_k è funzione di tutte le q_k attraverso le $y_{\lambda k}(q_k)$). Questo problema dinamico secondo Stäckel è ancora separabile, e precisamente indicando con c_λ delle costanti, in numero di $f-1$, le quali sostituiscono le π_k ($\sum_k \pi_k = 0$) si può mostrare che le p_k soddisfano alle equazioni:

$$\frac{1}{2m} p_k^2 - \left(\sum_1^{f-1} c_\lambda y_{\lambda k} + E y_{fk} + U_k \right) = 0.$$

Con la solita sostituzione si passa alle seguenti f equazioni ondulatorie

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k^2} + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} \left\{ \sum_1^{f-1} c_\lambda y_{\lambda k} + E y_{fk} + U_k \right\} \psi = 0.$$

La differenza sostanziale tra questo caso e il caso di Liouville è nella presenza delle $y_{\lambda k}$ (che non possono essere tutte delle costanti perchè in tale ipotesi si torna al problema precedente); il caso rappresentato dalle (1) è un problema di autovalori sia per E che per le c_λ ; si ha dunque un problema di *autovalori contemporanei*: per portare un esempio, nel caso di $f = 2$ si ha una sola c , e si può facilmente mostrare che gli autovalori di E ancora dipendono da speciali valori di c , e cioè da autovalori di c ⁽¹⁾.

(1) Si può mostrare che il problema dell'effetto Stark rientra in questo caso; infatti il problema viene abitualmente risolto usando coordinate paraboliche ξ, η e φ . L'energia totale in tali coordinate assume l'aspetto seguente:

$$H = \frac{1}{2m(\xi^2 + \eta^2)} \left[\left\{ p_\xi^2 + \frac{p_\varphi^2}{\xi^2} - 2mZe^2 + mF\xi^4 \right\} + \left\{ p_\eta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\eta^2} - 2mZe^2 - mF\eta^4 \right\} \right].$$

Poichè in questo caso è costante p_φ (la φ è variabile ignorata) si può porre $2\pi p_\varphi = n_3 \hbar$ e quindi al posto di p_φ comparirà $n_3 \hbar / 2\pi$. Le funzioni in questo caso sono due, il deter-

Il problema di Stäckel è stato ripreso da ROBERTSON ⁽²⁾. Egli ha dimostrato che un problema di Schrödinger è separabile quando in forma Hamiltoniana è un problema del tipo Stäckel. Altri contributi più particolari alla interessante ricerca dei casi nei quali si giunge praticamente alla separabilità si sono avuti da EISENHART ⁽³⁾.

2. - Il problema più generale dal punto di vista meccanico è quello di ricercare casi ancora più complessi di quelli finora trattati; dal punto di vista moderno è inoltre quello di stabilire quale aspetto questi casi più complessi assumono in teoria quantistica. Ora i casi più generali di separabilità sono stati studiati da vari Autori, ed il problema si presenta di una complessità grandissima. Il problema poi è stato ripreso dall'AGOSTINELLI ⁽⁴⁾ che in una memoria di grande interesse risolve completamente la questione determinando tutti i tipi di forza viva per cui l'equazione di Hamilton-Jacobi è integrabile per separazione di variabili ed in un'altra nota determina i tipi di potenziale delle forze. Come vedesi un problema fondamentale della Meccanica analitica ha potuto avere soluzione completa e ciò essenzialmente in conseguenza di più profonde conoscenze geometriche, come chiaramente risulta dalla memoria dell'AGOSTINELLI. Presenta un certo interesse il significato che possono assumere queste concezioni in teoria quantistica, almeno relativamente ai risul-

minante D è dato da $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \xi^2 & \eta^2 \end{vmatrix}$ e le funzioni $y_{\lambda\mu}(y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22})$ dal determinante scritto si ricava che sono date dalle relazioni

$$\begin{aligned} y_{11} &= 1 & y_{21} &= \xi^2, \\ y_{12} &= -1 & y_{22} &= \eta^2, \end{aligned}$$

e le due equazioni con variabili separate sono le seguenti

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} p_{\xi}^2 - cy_{11} - Ey_{21} + U_{\xi} &= 0, \\ \frac{1}{2m} p_{\eta}^2 - cy_{12} - Ey_{11} + U_{\eta} &= 0. \end{aligned}$$

Passando alle equazioni ondulatorie sia la E che la c acquistano autovalori distinti (A. SOMMERFELD: *Atombau und Spektrallinien* (Braunschweig, 1939) pag. 351. Come vedesi dunque, il problema s'inquadra perfettamente in quello di Stäckel.

⁽²⁾ A. ROBERTSON: *Math. Ann.*, **38**, 779 (1947).

⁽³⁾ L. P. EISENHART: *Proc. Nat. Ac. of Science*, **35**, 412, 490 (1949); *Ann. Math.*, **35**, 284 (1934); *Phys. Rev.* **74**, 87 (1948).

⁽⁴⁾ C. AGOSTINELLI: *Mem. Acc. Torino*, Sez. 2, tomo 69, Parte I (1936); *Atti R. Ist. Ven.*, Tomo 46, Parte IV, pag. 151 (1936). Ringrazio il prof. AGOSTINELLI per le delucidazioni datemi al riguardo mediante uno scambio di lettere.

tati di più immediata comprensione ottenuti dal LEVI-CIVITA. Questo Autore ha studiato in linea assolutamente generale le condizioni che devono essere soddisfatte perchè il problema sia separabile; l'Autore dimostra che le condizioni di tale separabilità si esprimono in gruppi distinti di relazioni, e più particolarmente un gruppo di equazioni è dipendente solo dalle derivate dell'energia cinetica e un gruppo di equazioni è dipendente dai valori dell'energia potenziale U ed inoltre compaiono le derivate di tale funzione; può dirsi, in base a questo risultato del LEVI-CIVITA, che per la separabilità deve essere assolutamente soddisfatta almeno l'assieme delle seguenti condizioni indipendenti da U e dalle sue derivate; se con T si esprime l'energia cinetica $T = \frac{1}{2} \sum_{rs} a_{rs} \dot{x}_r \dot{x}_s$ e s'introduce una funzione K data da $\frac{1}{2} \sum_{rs} a^{(rs)} p_r p_s$ per la separabilità si deve avere

$$(\alpha) \quad \frac{\partial K}{\partial p_i} \frac{\partial K}{\partial p_j} \frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial K}{\partial p_j} \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial p_i} + \\ + - \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial K}{\partial p_j} \frac{\partial^2 K}{\partial p_j \partial x_j} + \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial p_j} = 0 \quad i \geq j.$$

LEVI-CIVITA allora ricerca quando queste condizioni possono essere soddisfatte, il che si traduce nello stabilire quando un $ds^2 = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s$ è tale da giungere ad una funzione K che soddisfa alle (α) . L'indagine fatta dal LEVI-CIVITA porta al risultato seguente: qualora siano verificate le (α) , passando dalle coordinate gaussiane x_i alle coordinate cartesiane Y_i , queste coordinate cartesiane Y_i espresse in funzione delle x_i devono assumere la forma seguente

$$Y_r = \sum_1^n X_i^{(r)}(x_i).$$

In questo caso il ds^2 assume la forma euclidea, cioè la varietà V definita dal $ds^2 = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s$ è applicabile su un ds^2 euclideo.

Nella relazione precedente le $X_i^{(r)}(x_i)$ rappresentano funzioni arbitrarie dell'argomento generico (con una condizione: e cioè il determinante delle derivate prime deve essere diverso da zero perchè le (2) rappresentino una trasformazione non degenerare fra le Y e le x); quando si pone $x_i = \text{cost}$, le Y individuano ipersuperficie, e data la forma delle (3) queste superficie hanno particolarità, e sono dette *ipersuperficie di traslazione*.

In questo caso la varietà caratterizzata dal ds^2 è a curvatura riemanniana nulla e le ipersuperficie $x_i = \text{cost}$ in esse immerse sono ipersuperficie di traslazione.

Per meglio comprendere il significato fisico del risultato contenuto nelle (3) si consideri il caso tridimensionale, ed allora le (3) si scrivono nel modo seguente:

$$(a) \quad \begin{cases} Y_1 = X_1^{(1)}(x_1) + X_2^{(1)}(x_2) + X_3^{(1)}(x_3) \\ Y_2 = X_1^{(2)}(x_1) + X_2^{(2)}(x_2) + X_3^{(2)}(x_3) \\ Y_3 = X_1^{(3)}(x_1) + X_2^{(3)}(x_2) + X_3^{(3)}(x_3). \end{cases}$$

Essendo in questa una x_i uguale a costante si ha una superficie di traslazione.

Supponiamo ora che il problema in questo caso tridimensionale abbia come energia totale E un'espressione del tipo

$$(4) \quad E = \sum_1^3 \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U_i(x_i) \right];$$

si è così nel caso della separabilità classica, e cioè la U si scinde nella somma di tre U distinte, in ognuna delle quali compare una sola x ; ognuna di queste relazioni individua un moto oscillatorio, e la (4) rappresenta tre oscillatori distinti con tre frequenze caratteristiche; facendo una delle tre x uguale ad una costante si ha un piano; poichè il problema è triplamente periodico, ed i valori delle coordinate sono compresi entro certi limiti x'_1 e x''_1 , il moto rimane limitato in una porzione di spazio individuato fra i piani.

Quando si passa al caso generale prima trattato e si ha ancora la separabilità nel senso più vasto, e cioè sono soddisfatte la condizione (α) (oltre le altre condizioni relative alla U ed alle sue derivate che noi non consideriamo), perchè si verifichi questa separabilità è necessario che il ds^2 individui per $x_i = \text{cost}$ invece che un piano, quella che è stata detta una *superficie di traslazione*; questa superficie può considerarsi generata nel modo seguente: la retta $Y = z = 0$ diventi una curva α , la retta $z = x = 0$ diventi un'altra curva β , e questa curva β si muova appoggiandosi alla precedente α , si generi così una superficie che è appunto del tipo individuato dalle (4) quando si usa $x_1 = \text{cost}$; si può dunque dire che condizioni essenziali perchè si abbia la separabilità e che cioè siano soddisfatte le condizioni (α) (oltre poi le condizioni che dipendono dall'energia potenziale U) è che si abbia una trasformazione del piano in una superficie del tipo ora considerata.

Se in particolare il moto del problema è periodico, e quindi i valori delle variabili sono compresi fra certi limiti x'_1 e x''_1 , il moto rimane limitato in una certa porzione di spazio, ed i limiti di questa porzione in questo caso sono, invece che piani, le superficie $x_1 = \text{cost}$ definite dalle (4), e cioè anche in questo caso i limiti entro cui si compie il moto danno la possibilità di risalire alle coordinate che permettono, in queste condizioni più generali, almeno di sod-

disfare ad alcune condizioni che danno la possibilità di rendere il sistema separabile. Dunque anche in questo caso più generale un moto può essere separabile (se cioè sono soddisfatte le condizioni supplementari per l'energia potenziale) quando è certamente soddisfatta la condizione che detto moto è racchiuso in una porzione di spazio limitato da superficie di traslazione, le quali sono in ultima analisi le trasformate dei piani che compaiono nella separabilità del tipo di Liouville.

SUMMARY

In this Note, after having referred the typical case of Liouville's variable separation we analyse the one of Stäckel, showing how we meet it in the Stark effect, giving its interpretation in wave-mechanics. Examining further the subsequent work in this field which through AGOSTINELLI's research has brought to the complete resolution of the problem of separation, we show in LEVI CIVITA's case the geometrical analogy between this case, already very general, and the classical one.

Die Lage der ersten Anregungsstufe in Kernen mit gerader Protonen - und gerader Neutronenzahl.

P. STÄHELIN und P. PREISWERK

Eidgenössische Technische Hochschule - Zürich

(ricevuto il 6 Giugno 1953)

Summary. — The introduction refers to previous short communications [3] on the first excited state of even-even nuclei (Chap. 1). A survey shows that the lowest excitation energy of even-even nuclei is a smooth function of the neutron and proton number. In sequences of neighbouring nuclei the excitation energy increases if the number of protons or of neutrons approaches the next magic number (Chap. 2). Several nuclei which seemed to disobey this rule were reinvestigated experimentally, and in every case the new data obtained confirm the rule (Chap. 3). The 145 keV radiation which accompanies the transmutation of Cl^{34} into S^{34} [29] is an isomeric ($M\ 3$) transition between the known 33-min state and the ground state of Cl^{34} , the half life of which is 1.45 s. An $O^+ \rightarrow O^+$ transition with an ft-value of 2700 s leads directly to the ground state of S^{34} (§ 3·2). Two different isotopes of antimony, Sb^{123} and Sb^{116} , have indistinguishable half lives of (16 ± 2) min. The 1.3 MeV level which previously was attributed to Sn^{120} [42] belongs to Sn^{116} . The 60-min activity, with a γ -ray of 0.70 MeV [41], probably has to be reassigned to mass number 115 (instead of 116) (§ 3·10). In Hg^{196} a reported γ -ray of 175 keV [46] could not be confirmed, and a new line corresponding to a first level at 426 keV was found, which agrees with our rules (§ 3·13). Further experiments deal with Mo^{96} , Zr^{92} and Mo^{92} . The dependence of the lowest excitation energy on the number of protons and neutrons is interpreted in terms of the shell modell (Chap. 4). It is shown that a strong configurational interaction must be assumed (Chap. 5), and that in general the first excited state is due to a simultaneous excitation of the neutron and the proton structure (Chap. 6).

1. – Einleitung.

Die Anregungszustände der Kerne mit ungerader Masse waren schon der Gegenstand von zahlreichen systematischen Untersuchungen. Spin und Parität lassen sich weitgehend durch das Schalenmodell mit starker Spin-Bahn-Kopplung erklären [1]. Besonders mit den Anregungsenergien befaßte sich R. D. HILL [2] im Jahre 1950. Er verfolgte einander entsprechende Anregungszustände in Reihen von Kernen, die sich um Protonen- oder Neutronenpaare unterscheiden, und er fand dabei in beschränkten Bereichen eine systematische Abhängigkeit der Anregungsenergie von der Neutronen- und der Protonenzahl.

In Kernen mit gerader Protonenzahl und gerader Neutronenzahl (im folgenden kurz *g-g*-Kerne genannt) ist der Zusammenhang der ersten Anregungsenergie mit der Neutronen- und der Protonenzahl bedeutend einfacher und viel allgemeiner. Trotzdem wurde dieser Zusammenhang erst 1951 durch STÄHELIN und PREISWERK [3] erstmals untersucht (*). Danach läßt sich die Abhängigkeit der tiefsten Anregungsenergie von der Neutronen- und der Protonenzahl qualitativ in folgende Regeln fassen:

1) In den Anregungsenergien der *g-g*-Kerne erscheinen folgende Neutronen- und Protonenzahlen ausgezeichnet: 8; 20; 28; 38; 50; 82; 126.

2) In Reihen benachbarter *g-g*-Kerne mit gleicher Protonen- (Neutronen-) zahl steigt oder fällt die tiefste Anregungsenergie jenachdem, ob sich dabei die Neutronen- (Protonen-) zahl der nächsten ausgezeichneten Zahl nähert oder sich davon entfernt.

3) Außer in der Nähe der ausgezeichneten Protonen- oder Neutronenzahlen ändert sich die tiefste Anregungsenergie von Kern zu Kern nur um relativ kleine Beträge (« Stetigkeit »).

4) Die tiefste Anregungsenergie als Funktion der Protonen- und Neutronenzahl nähert sich nie dem Wert null (keine Vertauschung der Niveaufolge).

5) Die tiefste Anregungsenergie erreicht relative Maxima, wenn die Protonen- oder die Neutronenzahl eine der ausgezeichneten Zahlen überschreitet.

Diesen Regeln widersprachen vor zwei Jahren noch mehrere publizierte Zerfallsschemata. Es schien uns deshalb damals am Platze, vor der weitem

(*) Unabhängig davon wurden ähnliche Untersuchungen im folgenden Jahre auch von G. SCHARFF-GOLDHABER aufgenommen [4].

Auswertung der gefundenen Gesetzmäßigkeiten zuerst die Ausnahmen experimentell zu überprüfen, soweit dies mit den Mitteln unseres Institutes möglich war. Unsere Experimente sind nun zu einem gewissen Abschluß gelangt. Gleichzeitig sind, unabhängig von unserer Systematik der ersten Anregungsenergien weitere scheinbare Ausnahmen durch Untersuchungen anderer Autoren korrigiert worden. In allen Fällen bestätigen die neuen Ergebnisse die erwähnten Gesetzmäßigkeiten. Ein ausführlicherer Bericht als unsere vor zwei Jahren in *Helv. Phys. Acta* erschienene kurze Mitteilung [3] scheint deshalb heute gerechtfertigt.

Aus dem Vergleich der tiefsten Anregungsenergien in g - g -Kernen lassen sich einige Aufschlüsse über die Kernstruktur gewinnen. Diese Aufschlüsse sind anderer Natur, als was aus den Anregungsenergien der Kerne mit ungerader Masse folgt. In letzteren läßt sich die Anregung der tiefsten Stufe meistens als Sprung des einzigen ungepaarten Nukleons erklären. In einem festen Zentralfeld springt dieses von einem tieferen Quantenzustand in einen höheren. Der genaue Verlauf des Zentralfeldes, welches von Kern zu Kern ändern kann, ist nicht zum vorneherein bekannt. Es ist deshalb sehr schwierig, aus den empirischen Anregungsenergien der Kerne mit ungerader Massenzahl etwas über die Kernkräfte in Erfahrung zu bringen. In weiten Grenzen können nämlich beliebige Energiedifferenzen durch geeignete Annahmen über den Verlauf des Zentralpotentials erklärt werden [5].

Trotz diesem weiten Spielraum genügt ein einziges ungepaartes Nukleon nicht in allen Fällen zur Erklärung. Es gibt Kerne mit ungerader Massenzahl, in denen mindestens drei ungepaarte Nukleonen am ersten Anregungszustand beteiligt sein müssen [6]. Aus einer umfassenden Untersuchung solcher Fälle, wo auch die Wechselwirkung zwischen den drei ungepaarten Nukleonen eine wesentliche Rolle spielt, ließe sich eine Fülle von Auskünften über Form und Reichweite der Kernkräfte gewinnen. Eine systematische Auslese und Interpretation solcher Mehrteilchenzustände scheitert jedoch vorläufig an der Vielzahl der Interpretationsmöglichkeiten und an der allzu unvollständigen Kenntnis der Kernschemata.

In g - g -Kernen kann zum vorneherein kein «Einteilchenmodell» zur Erklärung der Anregungszustände genügen; es sind mindestens zwei ungepaarte Nukleonen zu berücksichtigen. Darin liegt wohl der Hauptgrund, weshalb ein systematischer Vergleich der Anregungsenergien im Zusammenhang mit dem Schalenmodell nicht früher unternommen wurde. Andererseits kann aber gerade deshalb die Untersuchung der g - g -Kerne Einsichten vermitteln, welche über das hinausgehen, was aus den «Einteilchenzuständen» der Kerne mit ungerader Massenzahl zu gewinnen ist. Der Umstand, daß die tiefsten Anregungszustände fast aller g - g -Kerne eine einheitliche Interpretation zulassen, bedeutet eine wesentliche Erleichterung dieser Untersuchungen.

2. – Energie der tiefsten Anregungsstufe.

2.1. – Beschränkung auf die tiefste Anregungsstufe.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich nur mit einer kleinen Auslese der Anregungszustände in g - g -Kernen, nämlich mit der tiefsten bekannten Anregungsstufe jedes g - g -Kernes. Darin liegt eine doppelte Beschränkung: Gezwungenermaßen müssen wir uns auf die bisher bekannten Anregungszustände beschränken, welche in allen Kernen höchstens einen kleinen Teil der vorhandenen Zustände ausmachen. Willkürlich wird unter diesen bekannten Zuständen nur je der energetisch tiefste jedes Kernes berücksichtigt.

Glücklicherweise ergibt sich durch diese doppelte Beschränkung nicht eine zusammenhangslose Auslese von Anregungszuständen. Es zeigt sich nämlich, daß die so ausgewählten Anregungszustände gesetzmäßig von der Neutronenzahl und der Protonenzahl abhängen, und daß sie einer einheitlichen Interpretation im Rahmen des Schalenmodelles zugänglich sind. Dadurch wird die Beschränkung auf je den tiefsten bekannten Anregungszustand a posteriori gerechtfertigt.

Für die Energien der zweiten oder höheren bekannten Anregungsstufen lassen sich keine so einfachen Regeln aufstellen. Das ist nicht erstaunlich, erkennt man doch schon aus den verschiedenen auftretenden Werten des Kernspins [7], daß hier eine einheitliche Interpretation nicht mehr in Frage kommt. Zudem ergibt sich bei den höheren Anregungszuständen aus der unvermeidlichen Beschränkung auf die bisher bekannten Anregungszustände eine weitgehend zufällige Auslese von Zuständen. Wir werden deshalb in unserer systematischen Übersicht keine höheren Anregungszustände berücksichtigen.

2.2. – Benützte Daten.

In der Tabelle I sind die tiefsten Anregungsenergien der g - g -Kerne, soweit sie uns heute bekannt sind, zusammengestellt. Die Kerne sind nach der Massenzahl A geordnet und durch die Protonenzahl P und die Neutronenzahl N genauer bezeichnet. Nach der beobachteten Anregungsenergie folgt das Produkt der Anregungsenergie mit $A^{2/3}$ (vgl. dazu Abschnitt 2.3). Alle Energieangaben sind in MeV ausgedrückt.

Unsere persönliche Beurteilung der Daten ist in der nächsten Kolonne enthalten. Die großen Buchstaben beziehen sich auf die Zuordnung der Isotope: A , Isotop sicher; B , Isotop unsicher. Die kleinen Buchstaben bedeuten verschiedene Genauigkeit der Energieangabe: a , zuverlässiger Wert, b , Energie nach ungenauer Methode bestimmt (z.B. Absorptionsmessung), c , Energie sehr

TABELLE I. — Benützte Daten über die erste Anregungsenergie.

<i>A</i>	<i>Z</i>	<i>N</i>	<i>E</i>	$E^* = A^{2/3} \cdot E$		Lit.
6	2 He	4	1,71	5,6	<i>Ac</i>	RMP
8	4 Be	4	2,90	11,6	<i>Ab</i>	RMP
10	4 Be	6	3,37	15,6	<i>Ba</i>	RMP
12	6 C	6	4,47	23,4	<i>Aa</i>	RMP
14	6 C	8	4,10	23,8	<i>Ac</i>	RMP
16	8 O	8	6,05	38,3	<i>Aa</i>	RMP
20	10 Ne	10	1,64	12,1	<i>Aa</i>	RMP
22	10 Ne	12	1,28	10,1	<i>Aa</i>	HPS
24	12 Mg	14	1,38	11,5	<i>Aa</i>	HPS
28	14 Si	14	1,78	16,5	<i>Aa</i>	HPS
30	14 Si	16	2,28	21,3	<i>Aa</i>	10
32	16 S	16	2,25	22,7	<i>Ab</i>	10
34	16 S	18	2,10	22,1	<i>Aa</i>	HPS*
38	18 A	20	2,15	24,3	<i>Aa</i>	HPS
40	18 A	22	1,45	17,0	<i>Aa</i>	HPS
42	20 Ca	22	1,51	18,2	<i>Aa</i>	HPS
44	20 Ca	24	1,16	14,5	<i>Aa</i>	HPS
46	22 Ti	24	0,89	11,4	<i>Aa</i>	HPS
48	22 Ti	26	0,98	13,0	<i>Aa</i>	11
52	24 Cr	28	1,46	20,3	<i>Aa</i>	HPS
54	24 Cr	30	0,835	11,9	<i>Aa</i>	HPS
56	26 Fe	30	0,845	12,4	<i>Aa</i>	HPS
58	26 Fe	32	0,810	12,1	<i>Aa</i>	HPS
60	28 Ni	32	1,332	20,4	<i>Aa</i>	HPS
62	28 Ni	34	1,30	20,4	<i>Ab</i>	HPS
64	28 Ni	36	1,34	21,4	<i>Aa</i>	HPS
66	30 Zn	36	1,04	17,0	<i>Aa</i>	HPS
68	30 Zn	38	1,10	18,3	<i>Aa</i>	HPS
72	32 Ge	40	0,680 (0 ⁺)	11,8	<i>Aa</i>	12*
			(0,835)(2 ⁺)	(14,4)	(<i>Aa</i>)	12*
74	32 Ge	42	0,596	10,5	<i>Aa</i>	HPS
74	34 Se	40	0,635	11,2	<i>Aa</i>	HPS
76	34 Se	42	0,567	10,2	<i>Aa</i>	HPS
82	36 Kr	46	0,772	14,6	<i>Ac</i>	HPS
84	36 Kr	48	0,89	17,1	<i>Aa</i>	13
86	38 Sr	48	1,076	20,9	<i>Aa</i>	HPS
88	38 Sr	50	1,853	36,6	<i>Aa</i>	HPS
90	40 Zr	50	1,7	34,0	<i>Ac</i>	HPS
92	40 Zr	52	0,930	18,9	<i>Aa</i>	14*
92	42 Mo	50	(0,390)	(7,8)	<i>Be</i>	15*
			1,50	30,5	<i>Ab</i>	16*
94	42 Mo	52	0,880	18,0	<i>Aa</i>	HPS
96	42 Mo	54	0,770	16,2	<i>Aa</i>	14*
104	46 Pd	58	0,56	12,4	<i>Ab</i>	17
106	46 Pd	60	0,513	11,5	<i>Aa</i>	HPS

TABELLE I - (Fortsetzung)

A	Z	N	E	E*	$A^{1/2} \cdot E$	Lit.
108	46 Pd	62	0.42	13.8	.1c	18*
110	48 Cd	62	0.656	15.1	.1a	HPS
112	48 Cd	64	0.62	16.6	.1b	19
114	48 Cd	66	0.548	12.9	.1a	20*
116	50 Sn	66	1.274	30.3	.1a	*
122	52 Te	70	0.568	13.9	.1a	HPS
124	52 Te	72	0.603	15.0	.1a	HPS
126	52 Te	74	0.64	16.1	.1b	HPS
126	54 Xe	72	0.382	9.6	.1a	HPS
128	54 Xe	74	0.428	10.9	.1a	HPS
130	54 Xe	76	0.537	13.8	.1c	HPS*
			(0.667)	(17.1)		
			(0.744)	(15.8)		
132	54 Xe	78	0.690	17.9	.Ba	HPS
134	56 Ba	78	0.602	15.8	.1a	HPS
138	56 Ba	82	1.39	35.8	.1c	21*
			(0.807)	(21.5)		
			(0.535)	(14.3)		
140	58 Ce	82	1.61	43.3	.1a	HPS
142	60 Nd	82	1.58	43.0	.1a	HPS
144	70 Nd	84	0.696	19.1	.1a	HPS
148	62 Sm	86	0.570	15.9	.1a	HPS
150	62 Sm	88	0.337	9.5	.1c	22
152	62 Sm	90	0.122	3.5	.1a	HPS
154	64 Gd	88	0.344	9.8	.1c	HPS
154	64 Gd	90	0.123	3.5	.1c	23
160	66 Dy	94	0.087	2.6	.1a	HPS
166	68 Er	98	0.080	2.4	.1a	HPS
170	70 Pb	100	0.084	2.6	.1a	HPS
176	72 Hf	104	0.087	2.8	.1a	HPS
180	72 Hf	108	0.093	3.0	.1a	HPS
180	74 W	106	0.102	3.2	.1a	HPS
186	74 W	112	0.123	4.0	.1a	HPS
186	76 Os	110	0.137	4.4	.1a	HPS
188	76 Os	112	0.152	5.0	.1a	HPS
190	76 Os	114	0.170	5.6	.1b	24
192	78 Pt	114	0.316	10.5	.1a	25
194	78 Pt	116	0.328	11.0	.1a	HPS
196	78 Pt	118	0.358	12.0	.1a	26*
196	80 Hg	116	0.426	14.3	.1a	26*
198	80 Hg	118	0.411	14.0	.1a	HPS
202	80 Hg	122	0.435	14.9	.Ba	HPS
204	82 Pb	122	0.374	13.0	.Ba	HPS*
206	82 Pb	124	0.803	28.0	.1a	HPS
208	82 Pb	126	2.62	92.0	.1a	HPS

TABELLE I - (Fortsetzung)

<i>A</i>	<i>Z</i>	<i>N</i>	<i>E</i>	$E^* = A^{2/3} \cdot E$		Lit.
212	84 Po	128	0,721	25,6	<i>Ac</i>	HPS
214	84 Po	130	0,609	21,7	<i>Aa</i>	HPS
220	86 Rn	134	0,241	8,8	<i>Aa</i>	27
222	86 Rn	136	0,186	6,8	<i>Aa</i>	HPS
222	88 Ra	134	0,117	4,3	<i>Aa</i>	HPS
224	88 Ra	136	0,087	3,2	<i>Aa</i>	HPS
226	90 Th	136	0,070	2,6	<i>Aa</i>	HPS
228	88 Ra	140	0,055	2,1	<i>Aa</i>	HPS
228	90 Th	138	0,058	2,2	<i>Aa</i>	HPS
230	90 Th	140	0,047	1,8	<i>Aa</i>	HPS
232	90 Th	142	0,050	1,9	<i>Ab</i>	HPS
232	92 U	140	0,045	1,7	<i>Ab</i>	HPS
234	90 Th	144	0,045	1,7	<i>Ab</i>	HPS
234	92 U	142	0,042	1,6	<i>Ab</i>	28
236	94 Pu	142	0,150	5,7	<i>Ac</i>	HPS
238	94 Pu	144	0,043	1,6	<i>Aa</i>	HPS
242	94 Pu	148	0,038	1,5	<i>Aa</i>	HPS
242	96 Cm	146	0,053	2,1	<i>Ac</i>	HPS

unsicher, da sich die Messung nicht sicher auf die erste Anregungsstufe bezieht.

Der größte Teil der benützten Daten ist auch in der verbreiteten Sammlung von J. M. HOLLANDER, I. PERLMAN und G. T. SEABORG [8] enthalten. Wir haben deshalb, wo dies möglich war, mit der Abkürzung HPS in der letzten Kolonne auf dieses Werk verwiesen, wo zusätzliche Literaturhinweise leicht zu finden sind. Die Bezeichnung RMP bezieht sich auf den Artikel von F. AJZENBERG und T. LAURITSEN [9] über die angeregten Zustände der leichtesten Kerne. Nur wo speziellere Angaben notwendig schienen, welche in keinem der beiden erwähnten Sammelwerke enthalten sind, haben wir durch Ziffern auf das Literaturverzeichnis am Schlusse dieser Arbeit verwiesen. Durch ein Sternchen hinter der Literaturangabe in der letzten Kolonne der Tab. I sind diejenigen Kerne gekennzeichnet, deren erste Anregungsstufe im Kap. 3 noch besonders diskutiert wird.

2.3. — Multiplikation der Energie mit $A^{2/3}$.

Mit wachsendem Kernradius nehmen die Anregungsenergien sehr stark ab. Wenn man die Anregungsenergien als Funktion der Neutronenzahl in einer Figur aufträgt, so überdeckt die starke Abhängigkeit vom Kernradius weitgehend die feineren Effekte der Schalenstruktur. Die Figur wird zudem unüber-

sichtlich, weil sich die Punkte für die schweren Kerne bei den kleinen Energien viel zu stark anhäufen.

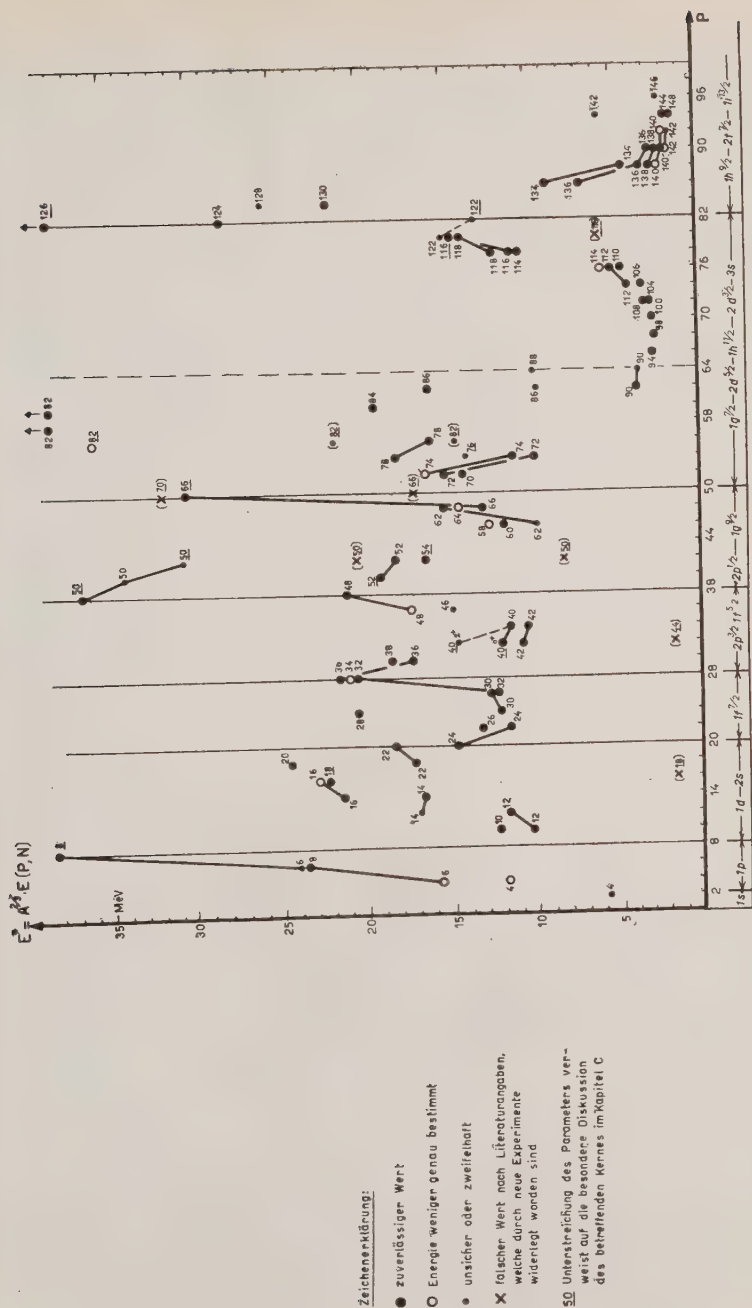
Wir haben deshalb versucht, die starke Abhängigkeit vom Kernradius dadurch wenigstens teilweise zu kompensieren, daß wir für unsere Übersicht alle empirischen Energiewerte willkürlich mit dem Faktor $A^{2/3}$ multiplizierten, welcher dem Quadrat des Kernradius proportional ist. (A ist die Massenzahl). Da sich unsere Untersuchungen hauptsächlich auf den Vergleich der Anregungsenergien in benachbarten Kernen stützen werden, kommt es nicht sehr genau darauf an, welche Potenz des Kernradius gewählt wird. Die Wahl gerade der zweiten Potenz ist eine Kompromißlösung. Bei den leichtesten Kernen dürfte die Abhängigkeit vom Kernradius damit überkompensiert sein, während der Faktor R^2 bei den schwersten Kernen wahrscheinlich zur Kompensation nicht ganz genügt.

2.4. – Die Fläche der ersten Anregungsenergie.

Die erste Anregungsenergie ist eine Funktion der Protonenzahl P und der Neutronenzahl N . Am besten läßt sich die Lage der ersten Anregungsstufen deshalb durch eine dreidimensionale Darstellung veranschaulichen [3], in welcher über der (P, N) -Ebene die tiefsten Anregungsenergien aufgetragen werden. An einem derartigen Modell, wie es praktisch von G. SCHARFF-GOLDHABER [4] ausgeführt worden ist, erkennt man leicht, daß die tiefsten Anregungsenergien mit wenigen Ausnahmen auf einer gemeinsamen stetigen Fläche liegen, welche im folgenden als « Fläche der ersten Anregungsenergie » bezeichnet wird.

In dieser Publikation müssen wir uns mit einer zweidimensionalen Darstellung behelfen. In der Fig. 1 P wird die Protonenzahl P als Abszisse gewählt. Darüber werden die mit $A^{2/3}$ multiplizierten tiefsten Anregungsenergien als Ordinate aufgetragen. Da die Lage der Anregungsenergie nicht nur von der Protonen- sondern auch von der Neutronenzahl abhängt, ist diese als Parameter neben jedem einzelnen Punkt geschrieben.

Der größte Mangel der Darstellung Fig. 1 P ist der, daß die Neutronen- und die Protonenzahl darin verschiedene Rollen spielen, während in Wirklichkeit die Anregungsenergie von beiden Variablen in gleicher Weise abhängt. Die Fig. 1 P ist deshalb durch die Fig. 1 N ergänzt worden, in welcher die Rollen der Protonen und Neutronen vertauscht sind. Da in der einen Figur die Abhängigkeit von N , in der andern die Abhängigkeit von P deutlicher zum Ausdruck kommt, wird man mit Vorteil beide Figuren benützen um sich über die Lage einzelner Punkte in der Fläche der ersten Anregungsenergie zu orientieren.



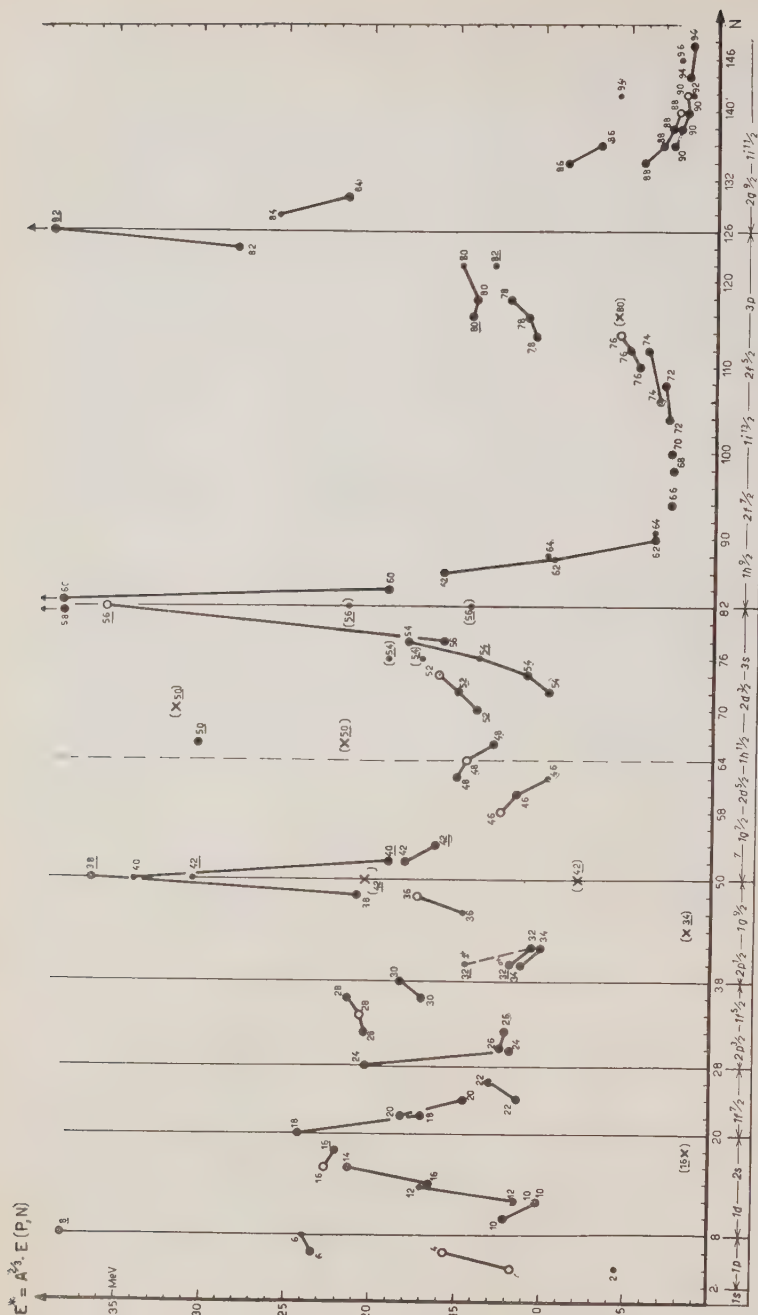


Fig. 1 N . - Mit $A^{2/3}$ multiplizierte tiefste Anregungsenergie der g - g -Kerne. Neutronenzahl als Abszisse, Protonenzahl als Parameter.

In den Fig. 1 P und 1 N liegen bei gewissen Werten der Abszisse die Punkte besonders hoch. (Die betreffenden Werte der Abszisse sind in den Figuren durch vertikale Geraden gekennzeichnet). Diese ausgezeichneten Werte der Abszissen sind die Protonen- bzw. Neutronenzahlen 8; 20; 28; 38; 50; 82; 126. Jede dieser Zahlen entspricht nach dem Schalenmodell mit starker Spin-Bahn-Kopplung einem Schalenabschluß [1].

Die Figuren 1 P und 1 N lassen sich als seitliche Projektionen des oben erwähnten dreidimensionalen Modelles auffassen. Untersucht man, wie die Lage der einzelnen Punkte mit den Parameterzahlen zusammenhängt, so kann man sich leicht vergegenwärtigen, wie die Fläche der tiefsten Anregungsenergie über der (P, N) -Ebene verläuft. In der folgenden qualitativen Beschreibung des Flächenverlaufes sind die in der Einleitung aufgezählten Regeln über die erste Anregungsenergie implizite enthalten:

Den ausgezeichneten Protonen- und Neutronenzahlen entspricht in der (P, N) -Ebene ein Netz von rechtwinklig zueinander verlaufenden Geraden. Dadurch wird die (P, N) -Ebene in einzelne Rechtecke aufgeteilt. Jedes Stück der Energiefläche, welches über einem solchen Rechteck liegt, bildet eine tiefe Mulde, die in der Mitte ziemlich flach verläuft und gegen die Ränder mit zunehmender Steilheit ansteigt. Zwei benachbarte Mulden besitzen dadurch jeweils einen gemeinsamen erhöhten Rand, welcher über einer der ausgezeichneten Geraden in der (P, N) -Ebene verläuft. Die Eckpunkte, in welchen je vier Mulden zusammenstossen, liegen ganz besonders hoch.

3. – Experimentelle Untersuchungen und Diskussion einzelner Kerne.

Im vorangehenden Kapitel ist in groben Zügen gezeigt worden, wie die tiefste Anregungsenergie der g - g -Kerne von der Neutronen- und der Protonenzahl, abhängt. Bevor wir auf die theoretische Deutung dieser Abhängigkeit eingehen, sollen die gefundenen Regeln unter einem rein phänomenologischen Gesichtspunkt auf einzelne besonders hervorstechende Beispiele angewandt werden. Ausnahmen von den Regeln sind auf ihre experimentelle Zuverlässigkeit hin zu diskutieren und, soweit es mit den Mitteln unseres Institutes möglich ist, experimentell zu überprüfen.

In zweiter Linie werden wir darauf achten, welche Schalenabschlüsse (« magische Zahlen ») die Energie der ersten Anregungsstufe merklich beeinflussen. In jeder Anwendung des Schalenmodells gilt nämlich die erste Frage der Konfiguration eines Kernes, d.h. der Verteilung der Nukleonen auf die verschiedenen Schalen des Kernes (nullte Näherung). Bei Kernen mit ungerader Massenzahl kann die Konfiguration in vielen Fällen aus dem Spin und aus dem magnetischen Moment recht zuverlässig bestimmt werden. In g - g -Kernen, wo

der Spin und das magnetische Moment im Grundzustand stets null sind, können wir auf diese Weise gar keine Anhaltspunkte über die Konfiguration gewinnen. Umso wichtiger ist es deshalb, zu wissen, welche Neutronen- und Protonenzahlen als «magische» Zahlen erscheinen, indem bei diesen Zahlen alle energetisch tieferen Schalen vollständig aufgefüllt sind, während alle folgenden Schalen noch leer sind. (Vgl. Kap. 5).

3.1. – Schalenabschluß 8.

Bei den leichten Kernen nimmt die erste Anregungsenergie mit wachsender Massenzahl zunächst monoton zu. Im O^{16} erreicht sie ein erstes sehr scharfes Maximum. (Tab. I und Fig. 1). Die hohe Anregungsenergie des ${}^8O^{16}$ hängt jedenfalls damit zusammen, daß zur Anregung dieses Kernes die $(1p)$ -Schale aufgebrochen werden muß, welche mit dem 8. Neutron und dem 8. Proton eben abgeschlossen wurde (vgl. Abschnitt 4.2).

3.2. – Die erste Anregungsstufe des ${}^{18}_{16}S^{34}$ und das 1,4 s-Isomer des ${}^{17}_{17}Cl^{34}$.

Die Anwendung der Regeln über die tiefste Anregungsenergie auf den Kern S^{34} ließ uns ein kurzlebiges Isomer des Cl^{34} finden.

3.2.1. *Frühere Untersuchungen über die Umwandlung des Cl^{34} .* – RUBY und RICHARDSON [29] haben 1951 in der Strahlung des 33 min - Cl^{34} neben andern Komponenten auch die Konversionselektronen einer γ -Strahlung von 145 keV nachgewiesen. Bis auf diese eine Strahlung konnten alle Komponenten in einem zuverlässig scheinenden Zerfallsschema untergebracht werden. Einzig die 145 keV - Strahlung ließ sich nicht eindeutig in dieses Schema einordnen. Es war zu vermuten, daß diese Strahlung im Zerfallszweig der 4,45 MeV β -Strahlung emittiert würde; auf diese Weise passen jedenfalls die gemessenen Energien am besten zusammen (vgl. Fig. 2).

3.2.2. *Die Einordnung der 145 keV - Strahlung in das Zerfallsschema.* – Um diese Vermutung zu bestätigen haben wir die relative Intensität der 145 keV- γ -Strahlung bestimmt. Am Betatron (*) stellten wir durch die Reaktion $Cl^{35}(\gamma, n)$ aktives 33 min - Cl^{34} her. Mit Hilfe eines Szilard-Chalmers-Prozesses

(*) Zur Bestrahlung durften wir das Betatron im radiotherapeutischen Institut des Kantonsspitals benützen. Dem Leiter dieses Institutes, Herrn Prof. Dr. SCHINZ und dem Vorsteher des Isotopenlabors, Herrn Dr. JOYET möchten wir dafür bestens danken.

wurde das aktive vom restlichen Chlor abgetrennt und auf wenige mm^3 konzentriert. Zur vollständigen Absorption der Positronen wurde das Chlor in eine kleine Messingkapsel verbracht. Nach einer von MAEDER [30] ausgearbeiteten Methode verglichen wir darauf im Szintillationsspektrographen die Intensitäten der 145 keV - Strahlung und der Vernichtungsstrahlung der Positronen. Auf je 100 Positronen entfallen (45 ± 10) γ -Quanten und ca. 6 Konversions-elektronen der 145 keV - Strahlung. Deren Häufigkeit stimmt somit im Bereich der Fehlergrenze mit der von RUBY und RICHARDSON [29] gemessenen Intensität des 4,55 MeV - Positronenspektrums überein. Die Zuordnung der 145 keV - Strahlung in den Zerfallszweig der 4,45 MeV - Positronen wird dadurch gestützt (Fig. 2).

Damit ist das Problem auf die Frage nach der Reihenfolge der β - und γ -Strahlung reduziert. Es entspräche der Mehrzahl der bekannten Zerfälle wenn die γ -Strahlung erst im Folgekern S^{34} emittiert würde. Für den Kern S^{34} ergäbe sich jedoch daraus eine tiefste Anregungsstufe bei 145 keV (in Fig. 1P durch ein Kreuz markiert). Eine so niedrige Anregungsenergie des S^{34} läßt sich auf keinen Fall mit der Forderung vereinigen, daß die tiefste Anregungsenergie stetig von der Neutronen- und der Protonenzahl abhängen soll. Die Regeln über die tiefste Anregungsenergie verlangen deshalb die umgekehrte Reihenfolge; die 145 keV - Strahlung muß schon vor der β -Umwandlung als isomerer Übergang im Cl^{34} emittiert werden. So gelangt man zum Zerfallsschema Fig. 2.

3.2.3. Die beiden isomeren Zustände des Cl^{34} . – Der isomere Übergang im Cl^{34} erfolgt durch magnetische Oktopol-Strahlung. Dies folgt aus dem Vergleich der von uns gemessenen γ -Intensität mit der Intensität der Konversionslinie, welche RUBY und RICHARDSON [29] gemessen haben. Daraus ergibt sich der totale Konversionskoeffizient $(14 \pm 4)\%$. Nach den Tabellen von ROSE *et al.* [31] bedeutet dies magnetische 2^3 -Pol-Strahlung. Die beiden Chlorisomere unterscheiden sich demnach im Spin um drei Einheiten.

Nach dem Schalenmodell kommen für das 17. Proton und für das 17. Neutron nur die Zustände $1d^{3/2}$ und $2s^{2/2}$ in Frage. Der resultierende Kernspin wird daher höchstens drei sein. Es folgt daraus, daß einer der beiden isomeren Zustände den Spin drei, der andere den Spin null aufweisen muß. Daraus, daß ein direkter β -Übergang vom Grundzustand des Cl^{34} in den Grundzustand

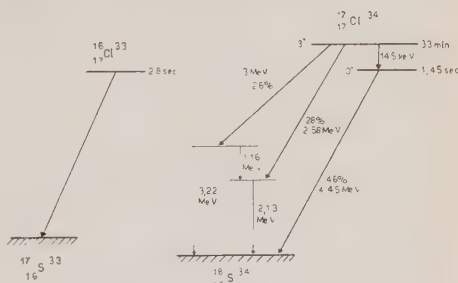


Fig. 2. – Zerfallsschemata des Cl^{34} und des Cl^{33} .

des S^{34} führt, geht hervor, daß der Spin null dem Grundzustand des Cl^{34} zuzuordnen ist.

Es ist beachtenswert, daß FLOWERS [32] auf Grund seiner Berechnungen richtig vorausgesagt hat, daß im Cl^{34} zwei tiefe Zustände mit dem Spin null und drei auftreten müßten.

Das Cl^{34} ist unseres Wissens der erste β -Strahler, dessen Grundzustand man den Spin null und gerade Parität zuschreiben kann. Da O^+-O^+ -Übergänge bei einer ausschließlichen GAMOW-TELLER-Wechselwirkung verboten sind, bildet die β -Umwandlung des Cl^{34} den direktesten Nachweis einer FERMI-Wechselwirkung.

Die β -Umwandlung des Cl^{34} ist von einem besonders einfachen Typ, da sich dabei das 17. Proton in ein Neutron verwandelt, ohne daß sich Spin oder Bahn des Teilchens dabei ändern müßten. Diese Umwandlung sollte daher zur Klasse der sogenannten « übererlaubten » gehören, und dementsprechend ist für den Grundzustand des Cl^{34} eine sehr kurze Halbwertszeit von der Größenordnung einer Sekunde zu erwarten.

3.2.4. Direkte Herstellung und Bestimmung der Halbwertszeit des Cl^{34} -Grundzustandes. – Alle bisherigen Aussagen über die zwei Isomere des Cl^{34} hängen von der Voraussetzung ab, daß die Anwendung unserer Regeln auf die erste Anregungsstufe des S^{34} richtig war. Es ist uns nachträglich gelungen, das Cl^{34} direkt im Grundzustand herzustellen und seine Halbwertszeit zu messen. Dadurch wird das in Fig. 2 wiedergegebene Zerfallsschema des Cl^{34} bestätigt.

Die Herstellung des kurzlebigen Cl^{34} erfolgte am Betatron des Kantonsospitals. Die zu erwartende kurze Halbwertszeit bedingte zu ihrer Messung eine besondere Anordnung. Durch eine kurze Rohrpostanlage (*) wurden die Präparate vom Ort der Bestrahlung in ca. 0,5 s vor ein Fensterzählrohr befördert. Die Impulse aus dem Zählrohr wurden in vier Impulsuntersetzern nacheinander während je einer Sekunde registriert. Vier Schaltsegmente, welche von einem Synchronmotor angetrieben wurden, verteilten die Impulse auf die verschiedenen Untersetzer (*). Die Meßzeiten und die Intervalle zwischen den Meßzeiten wurden mit einem geeichten Impulsgenerator und einem besonderen Impulsuntersetzer kontrolliert. Während einzelner Meßreihen änderten sich die Zeiten um weniger als 0,01 s. Der Beginn der Messung konnte gegenüber dem Ende der Bestrahlung bis zu 6 s verzögert werden; so konnte mit den vier Impulsuntersetzern der Abfall der kurzlebigen Aktivität bis zu zehn Sekunden nach dem Ende der Bestrahlung verfolgt werden. Zur Messung des langlebigen Untergrundes wurde ein weiterer, fünfter Impulsuntersetzer verwendet.

(*) Die Rohrpostanlage und der Impulsverteiler wurden uns vom physikalischen Institut der Universität zur Verfügung gestellt. Herrn Prof. Dr. WÄFFLER und Herrn Dr. RUBIN sind wir dafür zu Dank verpflichtet.

Das Chlor wurde als NaCl in einer Graphithölse vor jeder Messung während 3 s der Bremsstrahlung des Betatrons ausgesetzt. Die Bestrahlungen und Messungen wurden in Abständen von 3 min wiederholt und die Meßergebnisse auf den Impulsuntersetzern aufsummiert. Insgesamt wurden 200 Bestrahlungen ausgeführt und vom kurzlebigen Chlor etwa 10^5 Stöße registriert. Die Auswertung ergab als Halbwertszeit des Cl^{34} -Grundzustandes $(1,45 \pm 0,07)$ s. Der entsprechende ft-Wert ist $(2\,700 \pm 550)$ s.

3.2.5. *Bestätigung der Isotopenzuordnung.* – Der Nachweis, daß die gemessene Halbwertszeit sich wirklich auf den gesuchten Grundzustand des Cl^{34} bezieht, konnte auf Grund der Anregungsfunktion erbracht werden. Bei vier verschiedenen Maximalenergien des Betatron-Bremskontinuums haben wir die Ausbeute an 1,45 s - Cl^{34} mit der Ausbeute an 33 min - Cl^{34} verglichen:

γ -Maximalenergie:	31,5 MeV	26 MeV	20,5 MeV	15,5 MeV
$\sigma_{1,45\text{ s}} : \sigma_{33\text{ min}}$:	$1,9 \pm 0,4$	$1,9 \pm 0,4$	$1,6 \pm 0,4$	$1,4 \pm 0,6$

Wenn die Energie des Betatrons von 31,5 MeV auf 15,5 MeV reduziert wurde, so sank dabei die Ausbeute an beiden Aktivitäten auf weniger als den hundertsten Teil. Das Verhältnis der beiden Ausbeuten änderte sich jedoch nicht merklich. Die Anregungsfunktion und insbesondere die Schwellenenergie zur Bildung beider Aktivitäten müssen nahezu gleich sein: es handelt sich um isomere Zustände eines einzigen Kernes.

Zu tieferen Energien konnten die Wirkungsquerschnitte nicht verfolgt werden; bei der Maximalenergie 15,5 MeV des Betatrons war die Intensität des gebildeten Cl^{34} nur noch knapp meßbar. Nach der Massenformel kann man die Reaktionsschwellen grob abschätzen. Für die Reaktion $\text{Cl}^{35}(\gamma, n)\text{Cl}^{34}$ erhält man 14 MeV, für $\text{Cl}^{35}(\gamma, 2n)\text{Cl}^{33}$ 24 MeV als Schwelle. Es ist daher ausgeschlossen, daß die 1,45 s - Aktivität vom Cl^{33} herrühren könnte.

3.2.6. *Die Möglichkeit einer Verwechslung mit dem 2,8 s - Cl^{33} .* – Die kurzlebige Aktivität des Cl^{34} haben vor uns schon zahlreiche Autoren beobachtet; sie haben jedoch alle geglaubt, sie hätten es mit der β -Umwandlung des Cl^{33} zu tun. BOLEY und ZAFFARANO [33] haben versucht die Energie der β -Strahlung des Cl^{33} zu bestimmen. Als Eichspektrum verwendeten sie das β^+ -Spektrum des 33 min - Cl^{34*} mit $(4,45 \pm 0,11)$ MeV Maximalenergie. Damit verglichen sie das β -Spektrum des vermeintlichen Cl^{33} , welches in Wirklichkeit ebenfalls Cl^{34} war, und erhielten so, was uns heute nicht wundert, wiederum dieselbe Maximalenergie $(4,43 \pm 0,13)$ MeV. Hinterher erscheint dies als zusätzlicher Beweis der Richtigkeit unseres Schemas für das Cl^{34} .

Als Halbwertszeit des Cl^{33} fand HOAG [34] 2,8 s. SCHELLBERG, SAMPSON und MITCHELL [35] haben 1948 in der *Review of Scientific Instruments* eine Methode zur genauen Messung kurzer Halbwertszeiten beschrieben. Als An-

wendungsbeispiel untersuchten sie das Cl^{33} und fanden ebenfalls eine Halbwertszeit von 2,8 s. Sowohl HOAG wie SCHELLBERG *et al.* hatten zur Herstellung des Cl^{33} Schwefel mit Deuteronen bestrahlt. Da S^{32} weitaus das häufigste Schwefelisotop ist, bestand dabei die Gewähr, daß wirklich Cl^{33} erzeugt würde und daß keine Verwechslung mit dem Cl^{34} erfolgen konnte.

In allen übrigen uns bekannten Fällen wurde nur das 1,45 s - Cl^{34} oder Mischungen mit dem 2,8 s - Cl^{33} untersucht. Dieser Umstand spiegelt sich denn auch in der großen Streuung der Angaben über die Halbwertszeit [11]. Durch Mischung ist jedenfalls auch die Halbwertszeit ($1,8 \pm 0,1$) s bei BOLEY und ZAFFARANO [33] zustandegekommen. Die beiden Autoren haben Chlor mit einer 70 MeV - Bremsstrahlung aktiviert. Bei dieser hohen Anregungsenergie kann das Cl^{33} aus der Reaktion $\text{Cl}^{35}(\gamma, 2n)$ schon einen merklichen Anteil der gesamten Chloraktivität ausmachen. Bei kleineren Maximalenergien der Bremsstrahlung zwischen 16 MeV und 31,5 MeV haben wir dagegen noch keinen Einfluß des Cl^{33} auf die Zerfallskurve beobachten können.

3.3. – Schalenabschluß 20.

Bei 20 Neutronen erreicht die Anregungsenergie ein zweites, sehr deutliches Maximum (Fig. 1 *N*). Dieses entspricht dem Abschluß der 1*d*- und der 1*s*-Schale der Neutronen. Weniger deutlich kommt dagegen der Schalenabschluß mit dem 20. Proton (Fig. 1 *P*) zum Ausdruck; das ${}_{20}\text{Ca}^{42}$ und das ${}_{20}\text{Ca}^{44}$ weisen keine besonders hohe Anregungsenergie auf. Die Protonenzahl 20 ist jedoch wenigstens dadurch ausgezeichnet, daß die Anregungsenergie in Paaren von Kernen mit gleicher Neutronenzahl gegen die Protonenzahl 20 hin deutlich ansteigt.

3.4. – Schalenabschluß 28 und Schalenabschluß 38.

Viel ausgeprägter erscheint in Fig. 1 *N* und in Fig. 1 *P* der Schalenabschluß bei 28 oder 38 gleichen Nukleonen. Alle Kerne, deren Protonen- oder Neutronenzahl 28 oder 38 beträgt, zeichnen sich nämlich durch eine hohe Lage der ersten Anregungsstufe aus.

3.5. – Die erste Anregungsstufe des ${}_{32}^{40}\text{Ge}^{72}$.

Eine merkwürdige Ausnahme von der GOLDBABERSchen Spinregel [6] bildet das Ge^{72} . Der tiefste Anregungszustand dieses Kernes weist nämlich den Spin null auf [12]. Es liegt demnach hier ein anderer Anregungsmechanismus vor

als in den Nachbarkernen, deren erstem Anregungszustand der Spin zwei zuzuordnen ist. Überraschenderweise fügt sich das Ge^{72} trotzdem recht gut in die Darstellungen Fig. 1 *N* und 1 *P* ein (vgl. Abschnitt 5.1.2).

3.6. – Die erste Anregungsstufe des $^{44}_{34}\text{Se}^{78}$.

Bei der Umwandlung des 6,3 min - Br^{78} ins Se^{78} werden stark konvertierte Strahlungen von 46 keV und 108 keV beobachtet [36]. Es würde den Regeln über die erste Anregungsenergie widersprechen, wenn eine dieser Strahlungen nach dem β^+ -Zerfall in den Grundzustand des Folgekernes Se^{78} führen würde. Es ist daher anzunehmen, daß diese Strahlungen isomere Übergänge im Br^{78} darstellen. MARMIER und PREISWERK [37] haben die Röntgenstrahlung des Broms am gebogenen Kristall untersucht. Die Ergebnisse deuten darauf hin, daß die 6,3 min - Aktivität des Broms auch $\text{Br}-K_\alpha$ -Strahlung enthält, welche nur von einem isomeren Übergang im Br^{78} herrühren kann.

3.7. – Die erste Anregungsstufe des $^{54}_{42}\text{Mo}^{96}$.

MEDICUS [15] hat die Umwandlung des Te^{96} ins Mo^{96} untersucht. Im Zerfallsschema des Te^{96} findet sich zu unterst eine Kaskade zweier gleich intensiver γ -Strahlungen von 770 keV und 840 keV. Ihre Reihenfolge und damit die Energie der ersten Anregungsstufe lassen sich allein aus dem Zerfall des Te^{96} nicht sicher bestimmen.

Die Bestimmung der Reihenfolge ist uns dagegen über den β -Zerfall des Nb^{96} gelungen, welcher ebenfalls auf angeregte Zustände des Mo^{96} führt. Dabei tritt die 770 keV - Strahlung mit sechsmal größerer Intensität auf als die 840 keV - Strahlung. Die 770 keV - Strahlung muß daher im Zerfallsschema an unterster Stelle folgen.

Diesem Ergebnis widerspricht das Schema, welches ESTERDAY und MEDICUS [38] kürzlich publiziert. haben. Auf Grund unsicherer «crossover»-Übergänge ist darin die Reihenfolge der beiden letzten Stufen gegenüber dem ursprünglichen Schema von MEDICUS [15] vertauscht worden.

Die Untersuchung des Nb^{96} hat es uns auch erlaubt, den Konversionskoeffizienten der 770 keV - Strahlung genauer zu bestimmen, als es vom Te^{96} her möglich war. Da das Nb^{96} im Gegensatz zum Te^{96} nicht durch Elektroneneinfang sondern durch β^- -Emission zerfällt, kann die Intensität der Konversionselektronen direkt auf die Intensität des β -Spektrums bezogen werden. Die Absolutmessung einer γ -Intensität läßt sich dadurch umgehen. Der gefundene totale Konversionskoeffizient $(12 \pm 2) \cdot 10^{-4}$ stimmt überein mit dem theoretischen Koeffizienten für elektrische Quadrupolstrahlung.

3.8. — Schalenabschluß 50.

Von den Kernen, welche 50 Protonen oder 50 Neutronen enthalten, sind erst die Kerne Sr^{88} , Zr^{90} , Mo^{92} und Sn^{116} auf die Lage der ersten Anregungsstufe hin untersucht worden. Das ^{88}Sr und das ^{90}Zr weisen sehr hohe Anregungsenergien auf, wie es bei der «magischen» Zahl 50 zu erwarten ist. Für das ^{92}Mo und das ^{116}Sn sind dagegen in der Literatur verschiedene sich widersprechende, zum Teil relativ tiefe Anregungsenergien angegeben. Neue Experimente (vgl. Abschnitt 3.9 und 3.10) haben diese Widersprüche gelöst und gezeigt, daß in allen bisher untersuchten g - g -Kernen mit 50 gleichen Nukleonen die mit $A^{2/3}$ multiplizierte erste Anregungsenergie mindestens 30 MeV beträgt (Fig. 1).

3.9. — Die tiefste Anregungsstufe des $^{92}_{42}\text{Mo}$.

Die tiefste Anregungsenergie des Mo^{92} sollte nach verschiedenen Autoren *a)* 1,5 MeV, *b)* 1,0 MeV, bzw. *c)* 390 keV betragen. Diese Unstimmigkeit veranlaßte uns das Nb^{92} zu untersuchen, welches sich nach den Literaturangaben in das Mo^{92} unwandeln sollte.

a) KUNDU und POOL [16] stellten durch Absorptionsmessungen fest, daß die radioaktive Umwandlung des Te^{92} ins Mo^{92} von einer einzigen γ -Strahlung mit der Energie 1,5 MeV begleitet ist. Dieser Strahlung dürfte ein Übergang vom ersten Anregungszustand in den Grundzustand des Mo^{92} entsprechen. Jedenfalls paßt der Wert 1,5 MeV gemäß Fig. 1 *N* recht gut auf die Fläche der ersten Anregungsenergie.

b) Viel zu tief würde dagegen eine erste Anregungsstufe bei 0,1 MeV liegen. POOL und EDWARDS [39] fanden beim Zerfall des Nb^{92} eine starke γ -Strahlung von 1,0 MeV. Daneben stellten sie eine ebenso intensive Zr-K -Strahlung fest. Dies würde darauf hinweisen, daß die 1,0 MeV-Strahlung nach einem Elektroneneinfang im Zr^{92} emittiert würde. Später fanden jedoch KUNDU und POOL [40] am $10d$ - Nb^{92} noch ein β -Spektrum mit einer Maximalenergie von 1,38 MeV. Seither ist das Nb^{92} in den Isotopentafeln nur als β -Strahler aufgeführt [11] und das 1,0 MeV-Niveau wäre demnach dem Mo^{92} zuzuordnen.

Wir haben deshalb das Elektronenspektrum des $10d$ - Nb^{92} im Linsenspektrometer ausgemessen. Außer einigen Augerlinien fanden wir einzig eine starke Konversionslinie, welche einem Übergang von (930 ± 3) keV entspricht. Von einem kontinuierlichen β -Spektrum fehlte dagegen jede Andeutung. Die Umwandlung des Nb^{92} erfolgt demnach nicht durch β -Emission

sondern ausschließlich durch Elektroneneinfang. Die 930 keV - Strahlung wird folglich nicht im Mo, sondern, im Zr emittiert, und die Angabe eines 1,0 MeV - Niveaus im Mo⁹² [11] beruht auf einer falschen Interpretation der Experimente.

Außer der 930 keV - Strahlung werden keine weiteren γ -Linien gefunden. Im Spektrum der Photoelektronen, die in Thorium-pulver als Sekundärstrahler ausgelöst wurden, traten nämlich nur diejenigen Linien auf, welche von der 930 keV - Strahlung herrühren. Es muß sich daher um einen Übergang von der ersten Anregungsstufe in den Grundzustand des Zr⁹² handeln. Aus dem Intensitätsvergleich der Konversionselektronen mit der γ -Strahlung folgte der Konversionskoeffizient $\alpha_{\text{total}} = (7,5 \pm 2,5) \cdot 10^{-1}$. Nach den Tabellen von Ross *et al.* [31] paßt dieser Wert für elektrische Quadrupolstrahlung, wie sie vom ersten angeregten Zustand der *g-g*-Kerne zu erwarten ist [32].

c) Der kleinste der drei publizierten Werte für die tiefste Anregungsenergie des Mo⁹², 390 keV, wurde kürzlich unabhängig von unsern Untersuchungen durch ESTERDAY und MEDICUS [38] berichtigt. Die 390 keV-Strahlung ist in Wirklichkeit ein isomerer Übergang des 43 min - Tc⁹³. Wegen der Ähnlichkeit der Halbwertszeit war diese Strahlung früher irrtümlich der Umwandlung des 47 min - Tc⁹² ins Mo⁹² zugeordnet worden.

3.10. – Die erste Anregungsstufe des ⁶⁶₅₀Sn¹¹⁶ und des ⁷⁰₅₀Sn¹²⁰.

3.10.1. *Frühere Untersuchungen über die Umwandlung des 16 min - Sb.* – Die tiefste Anregungsenergie des Sn¹¹⁶ soll nach TEMMER [41] 0,70 MeV betragen. Für das Sn¹²⁰ geben BOEHM *et al.* [42] ein tiefstes Niveau bei 1,30 MeV an. Die erste Anregungsstufe sollte demnach im Sn¹²⁰ fast doppelt so hoch liegen wie im Sn¹¹⁶. Dieser Sprung der Anregungsenergie ist unvereinbar mit der Forderung nach einer stetigen Änderung der ersten Anregungsenergie mit wachsender Neutronenzahl.

Die 0,70 MeV-Strahlung im vermeintlichen Sn¹¹⁶ fand TEMMER als er Indium mit α -Partikeln von mehr als 27 MeV Energie bombardierte. Dadurch wurde ein 60 min-Sb-Isotop gebildet, welches sich durch Emission von Positronen und einer γ -Strahlung von 0,70 MeV in Zinn umwandelt. Die Zuordnung zur Massenzahl 116 erfolgte auf Grund einer Untersuchung im Massenspektrometer.

Gemäß diesen Angaben war zu erwarten, daß die Herstellung des 60 min-Sb auch in unserm Zyklotron gelingen sollte. Nach der Bestrahlung von Zinn mit Protonen von 6,8 MeV fand sich jedoch im entstandenen Antimon kein Anteil mit 60 min Halbwertszeit. Dies bedeutet einen unverständlich kleinen Wirkungsquerschnitt [42] einer allfälligen Reaktion Sn¹¹⁶(p, n)Sb¹¹⁶. Die Zuordnung des 60 min-Sb zur Massenzahl 116 mußte deshalb fraglich erscheinen.

Die Aktivität des 16 min Sb¹²⁰ ist schon von zahlreichen Autoren unter-

sucht worden [11]. Der Hauptbestandteil ist eine Positronenstrahlung mit einer Maximalenergie von 1,70 MeV [42]. Die Zugehörigkeit dieser Positronen zum Sb^{120} ist durch verschiedene unabhängige Experimente gesichert. BLASER, BOEHM, MARMIER und SCHERRER [43] haben die Schwellenenergie für die Bildung des Sb^{120} durch die Reaktion $\text{Sn}^{120}(\text{p}, \text{n})$ bestimmt. Die Schwellenenergie 3,5 MeV beweist, daß die Emission der 1,7 MeV-Positronen direkt in den Grundzustand des Sn^{120} führt.

Neben dieser bekannten Positronenaktivität fand BOEHM [42] schwache γ -Linien von 1,30 MeV, 0,90 MeV und 2,20 MeV. Wegen ihrer Halbwertszeit von ca. 16 min wurde diese Strahlung ebenfalls dem 16 min Sb^{120} zugeordnet.

Ebenfalls ca. 16 min betrug die Halbwertszeit eines schwachen energiereichen Positronenspektrums. Seine Maximalenergie 2,5 MeV ließ sich jedoch nicht mit der beobachteten (p, n)-Schwelle 3,5 MeV zur Bildung des Sb^{120} vereinen [42]. Es liegt deshalb nahe, zu vermuten, daß verschiedene Sb-Isotope mit ungefähr 16 min Halbwertszeit existieren. Dadurch wird auch die Zuordnung des 16 min- γ -Spektrums in Frage gestellt, da dieses nur auf Grund seiner Halbwertszeit dem Sb^{120} zugeordnet wurde.

3·10.2. Trennung zweier Sb-Isotope mit ununterscheidbarer Halbwertszeit. – Zur Abklärung der Zuordnung wurden deshalb im Zyklotron mehrere Zinnproben mit Protonen von verschiedener Energie bestrahlt. Das entstandene radioaktive Antimon wurde mit wenig Träger chemisch abgetrennt und zur Absorption der Positronen in eine kleine Messingkapsel eingeschlossen. Im Szintillationsspektrographen wurde darauf die Intensität der 1,3 MeV-Strahlung mit der Intensität der Vernichtungsstrahlung verglichen. Wenn die Bestrahlung mit der maximalen Protonenenergie 6,7 MeV durchgeführt worden war, so entfielen auf 100 Positronen etwa 30 γ -Quanten von 1,3 MeV. Bei verkleinerter Protonenenergie sank die relative Intensität der 1,3 MeV-Strahlung rasch ab. War die Zinnprobe zur Bestrahlung soweit ins Zyklotron hineingeschoben worden, daß die mittlere Energie der auftreffenden Protonen nur noch ca. 5,0 MeV betrug, so blieb von der 16 min-Aktivität nur noch die Vernichtungsstrahlung übrig.

Damit ist bewiesen, daß die ursprünglich dem Sn^{120} zugeordnete γ -Strahlung einem andern Zinnisotop mit höherer (p, n)-Schwellenenergie angehört.

Eine unabhängige Bestätigung dieses Resultates hat die Bestrahlung von Antimon am Betatron ergeben. Natürliches Antimon mit den Isotopen Sb^{121} und Sb^{123} wurde durch die Bremsstrahlung des Betatrons aktiviert. Da die Maximalenergie der Bremsstrahlung mit 30,5 MeV hoch über der (γ , n)-Schwelle liegt, ist es sehr unwahrscheinlich, daß irgend ein Isomer des Sb^{120} dabei nicht entstehen würde. Es trat denn auch sehr intensiv die bekannte Positronenaktivität des Sb^{120} auf. Dabei fehlte jede Andeutung einer γ -Strahlung mit einer Energie über 600 keV.

3.10.3. *Zerfallsschema und Zuordnung.* – Das 16 min- γ -Spektrum gehört also ebensowenig zum Sb^{120} wie das 2,4 MeV- β -Spektrum. Es ist sehr unwahrscheinlich, daß gleich drei verschiedene Aktivitäten des Sb ununterscheidbare Halbwertszeit haben. Wir nehmen deshalb, zunächst nur versuchsweise, an, daß neben dem Sb^{120} nur ein einziges weiteres Sb-Isotop mit ca. 16 min Halbwertszeit existiere. Aus den Intensitätsangaben in der Arbeit von BOEHM [42] können wir dann das Zerfallsschema dieses unbekannten Isotops konstruieren (Fig. 3). Die Massendifferenz Sb-Sn, welche man aus diesem Zerfallsschema errechnet, beträgt 4,7 MeV und paßt somit zur beobachteten (p, n)-Schwelle.

Aus der Massendifferenz Sb-Sn kann man in diesem Fall auf die Massenzahl schließen. Eine Zusammenstellung aller bekannten Massendifferenzen zwischen zwei benachbarten Isobaren in der Umgebung von $Z = 50$ zeigt nämlich, daß diese Massendifferenzen bei der Addition zweier Neutronen um $(1,05 \pm 0,15)$ MeV kleiner werden. Aus der bekannten Massendifferenz 2,7 MeV zwischen Sb^{120} und Sn^{120} folgt deshalb, daß das unbekannte 16 min-Sb vier Neutronen weniger und somit die Massenzahl 116 haben muß. (Unter den ungeraden Massenzahlen kämen wegen der Verteilung der natürlichen Isotope im Sn nur 117 und 119 in Frage; in beiden Fällen müßte die Massendifferenz weniger als 2,5 MeV betragen).

Wie die β^- -Umwandlung des Sb^{116} führt auch die β^- -Umwandlung des In^{116} auf angeregte Zustände des Sn^{116} . Von der Untersuchung des In^{116} her ist schon ein erstes Niveau des Sn^{116} bekannt [44]. In den Grenzen der Meßgenauigkeit stimmt dieses mit dem ersten Niveau im Schema Fig. 3 überein. Dies bedeutet eine zusätzliche Stütze unseres Zerfallsschemas für das 16 min-Sb.

3.10.4. (p, n)-Wirkungsquerschnitte des Sn. – Dem neuen Zerfallsschema entsprechend sind einige (p, n)-Wirkungsquerschnitte in der Arbeit von BLASER *et al.* [43] zu korrigieren. Dabei ergeben sich für die Sn-Isotope folgende Wirkungsquerschnitte der 6,7 MeV-Protonen:

Isotop:	Sn^{116}	Sn^{117}	3,3 min- Sn^{118}	Sn^{120}	Sn^{122}
$\sigma_{6,7\text{MeV}}$	8	9	7,5	13	$19 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$

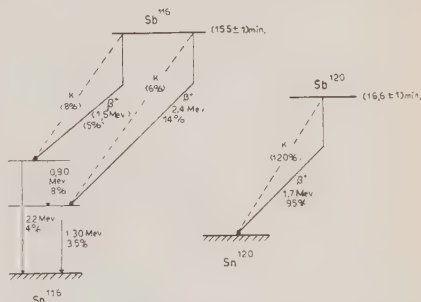


Fig. 3. – Wahrscheinliche Zerfallsschemata des Sb^{116} und des Sb^{120} . Die Intensitätsangaben sind der Arbeit von BOEHM entnommen und auf die neuen Zerfallsschemata umgerechnet worden. Die Procente beziehen sich auf das von BOEHM *et al.* beobachtete weichere Positronenspektrum, welches neben dem 1,7 MeV-Spektrum des Sb^{120} wahrscheinlich noch ein schwächeres (5%) 1,5 MeV-Spektrum des Sb^{116} enthält.

Die schwer verständliche Singularität des Wirkungsquerschnittes beim Sn^{116} ist damit behoben. Es ist deshalb nicht mehr notwendig, zur Erklärung dieser Singularität einen Schalenabschluß mit dem 66. Neutron [42] anzunehmen, und die Zuordnung des neuen 16 min-Sb zur Massenzahl 116 wird dadurch bestätigt.

Die Angaben von TEMMER [41] über ein 60 min-Sb¹¹⁶ lassen sich nicht mit unserem Schema vereinigen. Die Zerfallsenergie des 60 min-Sb, welche man aus den Daten von TEMMER berechnet, legt eine Zuordnung zur Massenzahl 115 nahe.

3.11. – Schalenabschluß 64? Schalenabschluß 92?

Als wir unsere erste Mitteilung über die Anregungsenergien der g - g -Kerne schrieben [3], faßten wir die auffällig hohen Anregungsenergien der drei Kerne

$${}_{48}^{64}\text{Cd}^{112} \text{ (860 keV), } {}_{64}^{92}\text{Gd}^{156} \text{ (2,0 MeV) und } {}_{92}^{140}\text{U}^{232} \text{ (230 keV)}$$

als Anzeichen eines Schalenabschlusses bei 64, bzw. 92 gleichen Nukleonen auf. Seither sind das Cd^{112} und das U^{232} neu untersucht worden. Die neuen Werte der ersten Anregungsenergie, 620 keV im Cd^{112} [19] und 45 keV im U^{232} [8], fügen sich glatt in die Fläche der ersten Anregungsenergie (Fig. 1 *N* und Fig. 1 *P*), so daß nun außer der sehr unsichern Angabe über das ${}_{64}^{92}\text{Cd}^{156}$ nichts mehr auf einen Schalenabschluß mit dem 64. oder 92. gleichen Nukleon hinweist.

3.12. – Die erste Anregungsstufe des ${}_{54}^{130}\text{Xe}^{130}$.

Bei der radioaktiven Umwandlung des I^{130} werden im Folgekern Xe^{130} hintereinander drei γ -Quanten von 537 keV, 667 keV und 744 keV emittiert [8]. Ihre Reihenfolge ist nicht bekannt. Aus der Forderung nach einem stetigen Verlauf der Kurve mit dem Parameter $P = 54$ in Fig. 1 *N* ergibt sich, daß die 537 keV-Strahlung in der Kaskade als unterste Stufe folgen muß.

3.13. – Die erste Anregungsstufe des ${}_{80}^{196}\text{Hg}^{196}$.

Nach STEFFEN [46] soll beim Zerfall des 5,6 d-Au¹⁹⁶ im Folgekern Hg^{196} als einzige γ -Strahlung eine elektrische Dipolstrahlung von 175 keV auftreten. Im Hg^{196} müßte demnach 175 keV über dem Grundzustand ein erster Anregungszustand mit Spin eins und ungerader Parität vorhanden sein. Der Spin eins und die ungerade Parität widersprechen der Regel von Goldhaber [6] über die ersten Anregungszustände der g - g -Kerne, und die Energie 175 keV paßt nicht auf die Fläche der ersten Anregungsenergie. Nach Fig. 1 *N* ist für das Hg^{196} eine erste Anregungsstufe bei ca. 400 keV zu erwarten. Dies

veranlaßte uns, in der Strahlung des $5,6d\text{-Au}^{196}$ nach einer γ -Linie von etwa 400 keV zu suchen.

Das Au^{196} wandelt sich zu 9 % ins Pt^{196} um und emittiert dort sehr intensive γ -Strahlungen von 331 keV und 354 keV. Auf Hg^{196} führen dagegen nur 8 % der Zerfälle. Die gesuchte Linie im Hg konnte deshalb nur relativ schwach sein, und es bestand die Gefahr, daß sie von den intensiveren Linien des Pt^{196} überdeckt würde. Wir durften deshalb die von HUBER, HUMBEL, SCHNEIDER und DESHALIT [47] gebaute Koinzidenzanordnung benutzen, wofür wir Herrn Prof. O. HUBER zu großem Dank verpflichtet sind. So konnten wir den Umstand ausnützen, daß im Hg^{196} welches durch β -Zerfall gebildet wird, alle Konversionselektronen je mit einem β -Elektron koinzidieren müssen, während die Koinzidenzrate im Pt^{196} , welches durch Elektroleneneinfang gebildet wird, viel kleiner ist.

Im magnetischen Linsenspektrometer, welches normalerweise, nur mit einem Zählrohr arbeitet, wurde zusätzlich direkt hinter der Au^{196} -Quelle (*) ein β -empfindlicher Szintillationszähler angebracht. Eine Koinzidenzschaltung sorgte dafür, daß die Elektronen im Spektrometer nur registriert wurden, wenn gleichzeitig ein anderes Elektron den Szintillationskristall traf. Auf diese Weise gelang es, im Spektrum der Konversionselektronen die Linien des Pt^{196} weitgehend zu unterdrücken. Bei 343 keV, an jener Stelle, wo sich sonst die *L*-Konversionslinie der 358 keV-Strahlung befindet, blieb eine bisher unbekannte *K*-Linie stehen. Die zugehörigen *L*- und *M*-Linien fanden sich in der Folge bei 411,5 keV, bzw. 423,5 keV, wo sie STEFFEN wegen der Nachbarschaft einer viel stärkeren Linie des $2,8d\text{-Au}^{198}$ nicht hatte finden können. Aus den Konversionslinien läßt sich die Energie (426 ± 1) keV der entsprechenden γ -Strahlung berechnen.

Die früher [46] beobachtete 175 keV-Strahlung fehlte in unsern Au-Quellen. Wir hätten die zugehörige *L*-Konversionslinie finden müssen, wenn sie fünf mal schwächer wäre, als STEFFEN sie gefunden hatte.

3.14. – Schalenabschluß 82 und Schalenabschluß 126.

Diejenigen Kerne, deren Protonen- oder Neutronenzahl in der Nähe von 82 oder 126 liegt, benötigen (abgesehen vom Pb^{201}) zur Anregung verhältnismäßig große Energien (Fig. 1). Die erste Anregungsstufe des $^{126}_{82}\text{Pb}^{208}$ liegt mit 2,62 MeV besonders hoch, da im Pb^{208} sowohl die Neutronen- wie die Protonenschalen alle abgeschlossen sind (vgl. Abschnitt 4.2).

(*) Herrn Prof. Dr. C. J. BAKKER möchten wir für die Herstellung des radioaktiven Goldes im Amsterdamer Zyklotron unsern besten Dank aussprechen.

Die Anregungsenergien der schweren Kerne mit $A > 150$ fügen sich in Fig. 1 *N* und Fig. 1 *P* viel besser auf eine einzige Kurve als die Anregungsenergien der leichteren Kerne. Das hängt damit zusammen, daß in der Reihe der stabilen Kerne mit zunehmender Massenzahl der Schalenabschluß der 126 Neutronen und der Schalenabschluß der 82 Protonen ungefähr gleichzeitig erreicht werden. Wegen dieses zufälligen Zusammentreffens ergibt, wenigstens für die schwersten Kerne, auch eine Darstellung der ersten Anregungsenergie in Funktion der Massenzahl [50] eine einigermaßen glatte Kurve.

3.15. — Die erste Anregungsstufe des $^{138}_{56}\text{Ba}$.

Ba^{138} entsteht bei der Umwandlung des natürlichen La^{138} . Dabei werden γ -Strahlungen von 535 keV, 807 keV und 1390 keV emittiert. Da die Summe der beiden kleineren Energien ungefähr gleich der Energie der härtesten Strahlungskomponente ist, wird gewöhnlich eine Kaskade parallel zur 1,39 MeV-Strahlung angenommen [21]. Daraus ergibt sich jedoch eine zu tiefe Lage der ersten Anregungsstufe im Ba^{138} (Fig. 1 *N*).

Die tiefste Anregungsenergie paßt dagegen, wenn das erste Niveau 0,39 MeV über dem Grundzustand liegt, und wenn die beiden weicheren Strahlungen nicht hintereinander auf den Grundzustand sondern nebeneinander auf das 1,39 MeV-Niveau führen. Dieses vermutete Zerfallsschema wird dadurch gestützt, daß die Intensität der beiden weicheren Komponenten zusammen gerade die Intensität der 1,39 MeV-Strahlung ergibt.

Wir hoffen, das Zerfallsschema des La^{138} durch die Aufnahme des Doppelspektrums der Koinzidenzen endgültig abzuklären, sobald der Doppelspektrograph unseres Institutes fertiggestellt sein wird.

3.16. — Besonderheiten des $^{204}_{82}\text{Pb}$.

Von den Ausnahmen, welche scheinbar gegen die Regeln über die tiefste Anregungsenergie verstießen, sind nun die meisten auf Grund neuer Experimente behoben. Unter den wenigen verbleibenden Ausnahmen steht das Pb^{204} im schärfsten Widerspruch zu den Regeln. Die tiefste Anregungsenergie 374 keV des Pb^{204} liegt trotz der Protonenzahl 82 unter der Anregungsenergie des benachbarten Hg^{202} , welches bei gleicher Neutronenzahl nur 80 Protonen enthält. Nach den Regeln wäre gegen die « magische » Protonenzahl 82 hin ein steiler Anstieg der Anregungsenergie zu erwarten.

Nicht nur die zu tiefe Anregungsenergie fällt am Pb^{204} auf. Das Pb^{204} nimmt auch in mancher anderen Hinsicht eine Sonderstellung unter den *g-g*-Kernen ein. Aus der besonders langen Lebensdauer schließt BOHR [50], daß

im Pb^{201} die Anregung der ersten Stufe mit einer Konfigurationsänderung verbunden ist. Die zweite Anregungsstufe des Pb^{201} ist mit einer Halbwertszeit von 1,1 h neben dem Hf^{180*} das einzige bekannte langlebige Isomer eines g - g -Kernes. Der Spin unterscheidet sich von dem des Grundzustandes wahrscheinlich um mindestens sechs Einheiten. Damit widerspricht das Pb^{201} als einziger g - g -Kern der Regel von GOLDAHBER [6], daß der Spin des zweiten Anregungszustandes in g - g -Kernen höchstens gleich vier sei. Merkwürdig ist ferner, daß das 374 keV-Niveau des Pb^{201} bei der Umwandlung des Tl^{201} ins Pb^{201} nicht angeregt wird [51]. Da das Tl^{201} den Spin zwei besitzt, wäre zu erwarten, daß die β -Umwandlung des Tl^{201} zum überwiegenden Teil auf das 374 keV-Niveau des Pb^{201} führen würde. Bemerkenswert ist schließlich auch die verblüffende Ähnlichkeit der Niveauschemata des g - g -Kernes Pb^{201} und des g - g -Kernes Pb^{207} [52].

Alle diese Eigenschaften wären ohne weiteres verständlich, wenn es sich gar nicht um den g - g -Kern Pb^{201} sondern um das Pb^{205} mit ungerader Neutronenzahl handeln würde. Tatsächlich ist die Zuordnung des 1,1 h-Bleisisomeres, von dessen Untersuchung alle bisherige Kenntnis der angeregten Zustände im Pb^{201} herrührt, noch gar nicht gesichert. Es ist uns bisher kein Experiment bekannt, welches eine Zuordnung zum Pb^{205} ausschließen würde.

4. – Interpretation auf Grund des Schalenmodells.

4.1. – Die Aufspaltung der Grundkonfiguration.

In der Fläche der tiefsten Anregungsenergien zeigt sich deutlich der Einfluß der Schalenabschlüsse bei den sogenannten «magischen» Zahlen. Deshalb liegt es nahe, die Erklärung des beobachteten Flächenverlaufes auf Grund des Schalenmodells zu versuchen.

Nach dem Schalenmodell beschreibt man den Kern durch die Eigenfunktionen einzelner Nukleonen in einem gemeinsamen Zentralpotential. Der Zustand jedes Nukleons wird in der nullten Näherung durch die Angabe der radialen Knotenzahl n , des Bahnmomentes l und der Summe j von Eigenspin und Bahnmoment bestimmt. Durch die Tripel (n, l, j) sind die einzelnen Schalen charakterisiert. Der Zustand des ganzen Kernes wird in der nullten Näherung durch die Konfiguration beschrieben; man gibt an, wieviele Protonen und wieviele Neutronen in jeder Schale vorhanden sind.

Der gleichmäßige Verlauf der Fläche für die erste Anregungsenergie wäre nicht zu erwarten, wenn bei der Anregung der Kerne ihr Aufbau grundlegend geändert würde. Es ist vielmehr anzunehmen, daß die Energie des Kernes

in nullter Näherung dieselbe bleibt und daß die Anregung der ersten Stufe nur einen feineren Differenzeffekt darstellt.

In der Tat ist im allgemeinen der Zustand eines Kernes durch die Konfiguration allein noch nicht vollständig festgelegt. Es bestehen noch weitere Freiheitsgrade, wenn mindestens eine Schale des Kernes nur teilweise gefüllt ist. Eine einzige Konfiguration kann daher mehrere Zustände mit verschiedenem Gesamtspin enthalten [54]. Man kann sich die zusätzlichen Freiheitsgrade eines Kernes etwa veranschaulichen als eine Umgruppierung der Teilchen in einer nicht vollständig gefüllten Schale. Die genaue Beschreibung eines Kernes verlangt daher, daß für diejenigen Teilchen, welche sich in unvollständig gefüllten Schalen befinden, neben der Schalenzugehörigkeit noch die magnetischen oder andere äquivalente Quantenzahlen (z.B. Seniorität und symplektische Quantenzahl [32]) angegeben werden.

Diese verschiedenen Zustände einer Konfiguration haben alle in der nullten Näherung dieselbe Energie, welche gleich der Summe der einzelnen Nukleonenergien in den verschiedenen Schalen ist. In einer weiteren Näherung, welche auch die Wechselwirkung einzelner Teilchen in einer nicht vollständig gefüllten und deshalb nicht kugelsymmetrischen Schale berücksichtigt, wird diese Degeneration aufgehoben; die Energie des Kernes hängt auch von der relativen Orientierung der Teilchen in der angebrochenen Schale ab.

Aus Experimenten weiß man, daß in g - g -Kernen der tiefste Zustand der Grundkonfiguration stets den Spin null aufweist. (Dies folgt auch aus der in der Einleitung erwähnten 4. Regel). Für einfache Konfigurationen mit starker Spin-Bahn-Kopplung hat FLOWERS [32] nachgewiesen, daß über dem Grundzustand als nächsthöherer derjenige Zustand folgt, welcher bei der Seniorität zwei den Spin zwei aufweist. Andererseits haben SUNYAR und GOLDBABER [6] von der experimentellen Seite her festgestellt, daß die ersten Anregungszustände fast aller g - g -Kerne wirklich den Spin zwei und gerade Parität aufweisen.

Dadurch wird bestätigt, daß die erste Anregungsstufe fast aller g - g -Kerne der Grundkonfiguration angehört, wie es schon oben allein aus dem glatten Verlauf der Energiefläche gefolgert wurde. Da damit die nullte Näherung für den Grundzustand und für den ersten Anregungszustand dieselbe ist, stört es uns wenig, daß wir die nullte Näherung in Unkenntnis des genauen Potentialverlaufes gar nicht berechnen können. Die Energiedifferenz zwischen dem Grundzustand und dem ersten Anregungszustand hängt in erster Näherung nur von der Wechselwirkung der äußersten Nukleonen unter sich ab. Der Vergleich der Energiedifferenzen gestattet deshalb direkte Schlüsse auf die Größe und die Art dieser Wechselwirkung [32].

4.2. – Kerne mit abgeschlossenen Schalen.

Die Regel, daß der zweitiefste Zustand der Grundkonfiguration den Spin zwei haben soll, gilt sowohl für L - S -Kopplung wie für j - j -Kopplung [32, 55]. In leichten Kernen überwiegt die L - S -Kopplung. Dies erkennt man auch an den ersten Anregungsstufen der g - g -Kerne. Ein Beispiel dafür ist der Kern ${}^6_6\text{C}^{12}$. Nach dem strengen j - j -Kopplungs-Modell wäre hier für Neutronen und Protonen die $(1p^3/2)$ -Schale eben abgeschlossen, und die Grundkonfiguration sollte nur den Grundzustand mit Spin null enthalten. Trotzdem besitzt der erste Anregungszustand dieses Kernes den üblichen Spin zwei, und auch die Anregungsenergie ist in diesem Fall nicht besonders groß (Fig. 1). Das läßt sich auf Grund des Schalenmodelles mit L - S -Kopplung verstehen. Darin ist nämlich die Protonen- und Neutronenzahl sechs nicht besonders ausgezeichnet, und der Kern ${}^6_6\text{C}^{12}$ nimmt deshalb keine Sonderstellung ein.

Der Kern ${}^8_8\text{O}^{16}$ verfügt dagegen auch in einem L - S -gekoppelten Modell nur über abgeschlossene Schalen. Die hohe Anregungsenergie und der Spin null des ersten Anregungszustandes zeigen deutlich, daß dieser einer anderen als der Grundkonfiguration angehört.

Bei mittleren und schweren Kernen überwiegt im Grundzustand die j - j -Kopplung, wie schon aus den ausgezeichneten Zahlen 28, 50, 82, 126 hervorgeht [1]. In gewissen Ausnahmefällen, kann es jedoch auch in diesem Gebiet vorkommen, daß bei genügend hoher Anregungsenergie die j - j -Kopplung teilweise zugunsten der L - S -Kopplung aufgehoben wird. Im ${}^{82}_{126}\text{Pb}^{208}$ wird bei 2,62 MeV ein Anregungszustand mit Spin zwei und gerader Parität gefunden. Für Neutronen und Protonen liegen hier nach dem j - j -gekoppelten Modell nur abgeschlossene Schalen vor. Die Stärke der Spin-Bahn-Kopplung des 126. Neutrons läßt sich aus den Neutronenbindungsenergien nach HARVEY [56] abschätzen. Danach beträgt der Sprung in der Bindungsenergie eines einzelnen Neutrons bei der Schallengrenze 126 etwa 2 MeV. Für die Protonen bei $P = 82$ ist der Sprung eher noch etwas kleiner [57]. Eine teilweise Aufhebung der j - j -Kopplung zugunsten einer L - S -Kopplung ist deshalb bei der hohen Anregungsenergie 2,62 MeV nicht ausgeschlossen, und der erste Anregungszustand des Pb^{208} wäre damit als L - S -Zustand aufzufassen. Selbstverständlich muß im Rahmen eines j - j -gekoppelten Modelles trotzdem von einer Konfigurationsänderung gesprochen werden.

Ähnliche Verhältnisse wie im Pb^{208} liegen auch im ${}^{50}_{38}\text{Sr}^{88}$ vor.

4.3. – Die Mulden in der Fläche der tiefsten Anregungsenergie.

Eine stetige Abhängigkeit der tiefsten Anregungsenergie von der Neutronen- und der Protonenzahl ist eine selbstverständliche Folge jedes kontinuierlichen Kernmodells. Als Oberflächenschwingungen eines Kerntropfchens interpretiert

A. BOHR [50] die tiefsten Anregungszustände der g - g -Kerne. Diese Modellverstellung erklärt ebenfalls den Spin zwei und die gerade Parität des ersten Anregungszustandes.

Ein kontinuierliches Modell muß jedoch versagen, wo es gilt, die Auszeichnung bestimmter Neutronen- und Protonenzahlen zu erklären. BOHR erzwingt jedoch den richtigen Verlauf der Fläche der ersten Anregungsenergie dadurch, daß er die Deformabilität der Kernoberfläche von Kern zu Kern verschieden ansetzt. Damit die Mulden in der Fläche der ersten Anregungsenergie richtig herauskommen, muß die Deformabilität sehr steil ansteigen, wenn zu einem Kern mit lauter abgeschlossenen Schalen weitere Nukleonen hinzugefügt werden. Bei den Kernen mit minimaler Anregungsenergie erreicht dann die Deformabilität ihr Maximum. Die maximale Deformabilität tritt dementsprechend auf, wenn die Protonen- und Neutronenzahlen ungefähr in der Mitte zwischen zwei der ausgezeichneten Zahlen liegen.

Während in einem kontinuierlichen Kernmodell die variable Deformabilität ad hoc anzunehmen ist, ergibt sie sich zwangslos aus dem Schalenmodell. Schon in einer einzigen Schale nimmt beim fortlaufenden Einbau von Nukleonen die Anzahl verschiedener Zustände anfangs sehr rasch zu, überschreitet dann bei halbgefüllter Schale ihr Maximum und sinkt gegen den Schalenabschluß wieder auf eins ab. Als Beispiel dafür entnehmen wir einer Zusammenstellung [54] folgende Angaben über die Zustände in einer isolierten $1i^{13}/2$ -Schale der Neutronen:

Konfiguration (in diesem Fall Anzahl der $i^{13}/2$ -Neutronen	0	2	4	6	8	10	12	14
Anzahl unabhängiger Zustände dieser Konfiguration	1	7	55	151	151	55	7	1
Anzahl der 2^+ -Zustände in dieser Konfiguration	0	1	4	7	7	4	1	0

Selbst wenn man berücksichtigt, daß sich diese Zustände mit wachsender Anzahl auch über ein breiteres Spektrum verteilen, so bleibt doch bei halbgefüllter Schale eine größte mittlere Zustandsdichte, was auch einer größten Deformabilität entspricht.

Noch viel stärker vermehrt sich die Anzahl der Zustände einer Konfiguration, wenn gleichzeitig mehrere Schalen des Kernes nur teilweise gefüllt sind. So wie im Abschnitt 4.1 der Begriff «Schale» definiert wurde, enthalten die schwersten Kerne mehr als 20 verschiedene Schalen. Trotzdem machen sich nicht mehr als 8 Schalenabschlüsse in der Fläche der ersten Anregungsenergie bemerkbar (Fig. 1). Wenn zum Beispiel die Protonenzahl von 50 auf 82 ansteigt, so werden dabei die Schalen $1g^7/2$, $2d^3/2$, $1h^{11}/2$, $2d^3/2$ und $3s$ aufgefüllt, ohne daß sich in der ersten Anregungsenergie ein Zwischenmaximum zeigen würde. Im ganzen Bereich zwischen $P = 50$ und $P = 82$ findet sich demnach kein Kern mit lauter abgeschlossenen Protonenschalen. Das rührt

davon her, daß beim fortlaufenden Einbau von Nukleonen in den Kern außer in der Nähe der ausgezeichneten Protonen- und Neutronenzahlen (vgl. Regel 1, Kapitel 1) stets schon mit der Füllung der nächsthöheren Schale begonnen wird, bevor die tieferen alle abgeschlossen sind [58].

Wenn die Protonen- und die Neutronenzahl je ungefähr in der Mitte zwischen zwei der ausgezeichneten Zahlen liegt, so sind gewöhnlich mehrere Schalen angebrochen. Die Anzahl der möglichen Zustände mit dem Spin zwei in der Grundkonfiguration wird deshalb besondere groß, und damit steigt auch die Wahrscheinlichkeit, daß sich durch Mischung (vgl. Kap. 5 und 6) ein energetisch besonders begünstigter Zustand kombinieren läßt. Man kann so wenigstens qualitativ die flachen Minima der ersten Anregungsenergie zwischen den scharfen Maxima bei den ausgezeichneten Protonen- und Neutronenzahlen verstehen.

Der glatte Verlauf der Fläche für die erste Anregungsenergie ist dadurch jedoch nicht erklärt. Es wären nämlich mindestens Unstetigkeiten in der Fläche der ersten Anregungsenergie zu erwarten, wenn durch das Hinzutreten eines weiteren Nukleonenpaares plötzlich eine von mehreren angebrochenen Schalen abgeschlossen würde. Es wird sich jedoch zeigen, daß beim fortschreitenden Aufbau des Kernes stetige Übergänge möglich sind, da, wie im nächsten Kapitel nachzuweisen ist, eine starke Konfigurationswechselwirkung vorhanden ist. Diese bewirkt, daß die einzelnen Nukleonenpaare nicht alle ausschließlich der einen oder der andern Schale zuzuordnen sind.

5. – Konfigurationsmischungen.

5.1. – Verteilung der tiefsten Anregungsstufen.

Während in Kernen mit ungerader Massenzahl oft isomere Zustände mit sehr niedriger Anregungsenergie und langer Lebensdauer gefunden werden, fehlen solche Zustände in g - g -Kernen. Das hängt damit zusammen, daß die Grundzustände der g - g -Kerne in der Regel Mischungen verschiedener Konfigurationen sind.

In der Fig. 4 ist die Verteilung der tiefsten Anregungsenergien der leichten und mittleren Kerne dargestellt. Horizontal ist die tiefste Anregungsenergie, multipliziert mit $A^{2/3}$, aufgetragen (wegen des Faktors $A^{2/3}$ vgl. Abschnitt 2.3). Die schraffierte Fläche ist der Anzahl der Kerne mit ersten Anregungsenergien im betreffenden Energieintervall proportional.

5.1.1. Die isomeren Zustände der Kerne mit ungerader Massenzahl. – Die Verteilung der Anregungsenergien in den Kernen mit ungerader Massenzahl

erinnert an eine Zufallskurve, da die Lage der ersten Anregungsstufe weitgehend von der Lage des Grundzustandes unabhängig ist. In der Regel läßt sich die tiefste beobachtete Anregungsstufe als Zustand einer höheren Konfiguration interpretieren. Damit gehören der Grundzustand und der erste

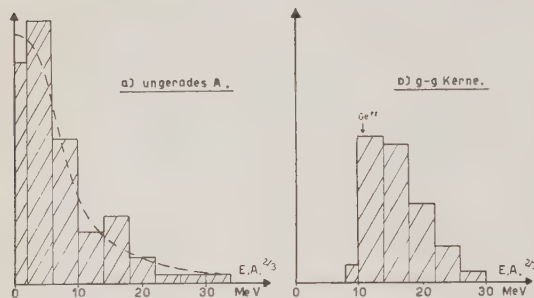


Fig. 4. – Verteilung der mit $A^{2/3}$ multiplizierten tiefsten Anregungsenergien der leichten und mittleren Kerne bis zu $A=140$.

und HILL [52] haben gezeigt, daß dabei die Energiedifferenz zwischen den entsprechenden Zuständen nicht konstant ist sondern sich mit der Neutronen- und der Protonenzahl stetig ändert und oft auch durch null hindurch geht. Dies zeigt, daß die Energie des zuletzt hinzugekommenen Teilchens nicht nur von der Schale sondern auch stetig vom Füllungsgrad dieser Schale abhängt. Je nach dem Füllungsgrad der verschiedenen Schalen kann für dieses Teilchen sogar die energetische Reihenfolge dieser Schalen verschieden sein.

5.1.2. *Das Fehlen tiefliegender Isomere in g-g-Kernen.* – Genau dasselbe wird auch in $g-g$ -Kernen festgestellt, wo oft mit der Füllung der nächsthöheren Schale begonnen wird, bevor die tieferen alle abgeschlossen sind [58]. Auch beim Aufbau der $g-g$ -Kerne kommt es also vor, daß die Reihenfolge entsprechender Konfigurationen vertauscht wird, wobei die Energiedifferenz der entsprechenden Konfigurationen ihr Vorzeichen wechselt. Da die Energien stetig vom Füllungsgrad der Schalen abhängen, muß es mindestens in den Gegenden, wo ein Vorzeichenwechsel erfolgt, Kerne geben, in welchen zwei Konfigurationen nahezu dieselbe Energie haben. Man könnte deshalb auch unter den $g-g$ -Kernen solche mit sehr tiefliegenden Anregungszuständen erwarten. Nach der Fig. 4b scheinen jedoch solche Zustände zu fehlen.

Zu den tiefsten Zuständen der $g-g$ -Kerne können nur Konfigurationen beitragen, in denen jede Schale eine gerade Anzahl von Nukleonen enthält. In den tiefsten Zuständen dieser Konfigurationen sind alle Nukleonen gepaart. Der Kernspin ist daher null und die Parität gerade. Wir müssen deshalb

Anregungszustand zu verschiedenen nullten Näherungen. Da zudem gewöhnlich der Gesamtspin und oft auch die Parität beider Zustände verschieden sind, ist die Unabhängigkeit der relativen Lage auch in höheren Näherungen gewährleistet.

Oft lassen sich isomere Zustände durch ganze Reihen benachbarter $u-g$ - oder $g-u$ -Kerne hindurch verfolgen. GOLDBABER

speziell nach tiefen Anregungszuständen mit Spin null und gerader Parität suchen.

Daraus, daß bisher noch keine sehr tiefen Anregungszustände von diesem Typ bekannt sind, folgt noch nicht ohne weiteres ihr Fehlen. Es wäre denkbar, daß sie sich der Beobachtung weitgehend entziehen, weil direkte Übergänge zwischen zwei Zuständen mit dem Spin null nach den Auswahlregeln für elektromagnetische Strahlung verboten sind.

Glücklicherweise existiert jedoch eine Ausnahme, welche beweist, daß man $O-O^+$ -Übergänge doch finden kann: Im Ge^{72} wird dem ersten angeregten Zustand der Spin null und gerade Parität zugeschrieben [60]. Durch innere Konversion mit einer Halbwertszeit von 0,3 ms geht dieser Zustand in den Grundzustand über. Die Halbwertszeit ist längst nicht von einer so hohen Größenordnung, daß $O-O$ -Übergänge deshalb nicht beobachtet werden sollten. Wenn tiefe Anregungsstufen mit dem Spin null auch einige mal seltener wären als die isomeren Zustände in Kernen mit ungerader Masse, so hätte man doch schon einige finden müssen.

Der O^+ -Zustand des Ge^{72} liegt mit 680 keV schon relativ hoch (vgl. Fig. 4). Die Existenz dieser Ausnahme tut deshalb der Feststellung, daß g - g -Isomere in der Nähe des Grundzustandes fehlen, keinen Abbruch.

5.2. Die Mischung energetisch benachbarter Konfigurationen.

Das Fehlen tiefer g - g -Isomere widerspricht scheinbar der früheren Aussage, daß es auch g - g -Kerne geben muß, in welchen sich die Energie der nächsthöheren Konfiguration nur wenig von der Energie der Grundkonfiguration unterscheidet. Der vermeintliche Widerspruch findet jedoch seine Lösung darin, daß die tiefsten Zustände benachbarter Konfigurationen in höherer Näherung nicht unabhängig sind. Die guten Quantenzahlen Spin und Parität stimmen überein, während die Quantenzahlen, welche die Schalenzugehörigkeit der einzelnen Nukleonen bestimmen, bekanntlich keine sehr guten Quantenzahlen sind. Als wirklicher Grundzustand des Kernes wird deshalb jene Mischung von Konfigurationen auftreten, welche die tiefste Gesamtenergie des Kernes ergibt.

Solche Konfigurationsmischungen können die Lücke in der Niveaueverteilung Fig. 4b erklären. Dies sei am Beispiel zweier Konfigurationen gezeigt, deren tiefste Zustände durch die Wellenfunktionen ψ_1 und ψ_2 dargestellt werden. Die entsprechenden Energien $E_1 = \langle \psi_1 | H_{11} | \psi_1 \rangle$ und $E_2 = \langle \psi_2 | H_{22} | \psi_2 \rangle$ sollen sich nur wenig unterscheiden. Daß die Zustände ψ_1 und ψ_2 nicht Eigenzustände des Kernes sind, äußert sich darin, daß das nicht diagonale Element H_{12} des Hamiltonoperators von null verschieden ist. Als Eigenzustände des Kernes

treten deshalb Linearkombinationen auf:

$$\psi_a = \alpha\psi_1 - \beta\psi_2, \quad \psi_b = \beta\psi_1 + \alpha\psi_2 \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Die Niveaudistanz $E_b - E_a$ ergibt sich daraus als Differenz der Eigenenergien (mit $E_{12} = |\bar{\psi}_1 H_{12} \psi_2| = |\bar{\psi}_2 H_{21} \psi_1|$).

$$\begin{aligned} E_b &= \beta^2 E_1 + \alpha^2 E_2 + 2\alpha\beta E_{12} \\ E_a &= \alpha^2 E_1 + \beta^2 E_2 - 2\alpha\beta E_{12} \\ E_b - E_a &= (\alpha^2 - \beta^2)(E_2 - E_1) + 2\alpha\beta \cdot 2E_{12} \end{aligned}$$

Da ψ_a und ψ_b Eigenzustände sein sollen, lassen sich α und β aus der Orthogonalitätsbedingung $|\psi_a H \psi_b|$ bestimmen und einsetzen:

$$E_b - E_a = 2 \cdot E_{12} \sqrt{1 + \left(\frac{E_2 - E_1}{2 \cdot E_{12}} \right)^2} \geq 2 \cdot E_{12}.$$

Zwei Zustände mit gleichem Spin und gleicher Parität können also nicht näher zusammenrücken als bis auf die Wechselwirkungsenergie $2E_{12}$.

Dieses Verhalten ist in Fig. 5 schematisch dargestellt. Von links nach rechts steigt die Energiedifferenz entsprechender Konfigurationen stetig von

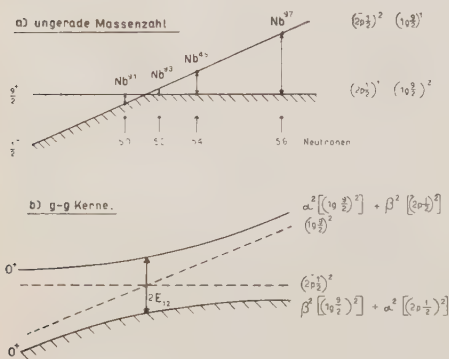


Fig. 5. — Schematische Darstellung der Wechselwirkung energetisch benachbarter Konfigurationen.

negativen Werten über null zu positiven Werten. Die obere Fig. 5a zeigt als Beispiel für ungerade Massenzahlen die Reihe Nb⁹¹ bis Nb⁹⁷. Darunter ist am ⁴⁰Zr als hypothetischem Beispiel mit den Konfigurationen ... (2p^{1/2})² und ... (1g^{3/2})² gezeigt, wie sich die Niveaudistanzen der g-g-Kerne in einem entsprechenden Fall verhalten. Wo die Energiedifferenz der benachbarten Konfigurationen gegen null geht, treten in ungeraden Kernen isomere Anregungszustände mit langer Lebensdauer auf, während in g-g-Kernen eine minimale Anregungsenergie $2 \cdot E_{12}$ erhalten bleibt.

Anhand der Fig. 4b läßt sich nun auch etwas über die Größenordnung der Konfigurationswechselwirkung aussagen. Die Wechselwirkung muß nämlich mindestens so stark sein, daß sie die breite Lücke in der Niveauverteilung Fig. 4b erklärt. Die mit $A^{2/3}$ multiplizierten Niveaudistanzen sind dort alle

größer als 8 MeV. Die Wechselwirkungsenergie benachbarter Konfigurationen, $2 \cdot E_{12}$, muß also im allgemeinen größer sein als $8 \text{ MeV} \cdot A^{-2/3}$.

5.3. – Einfluß der Konfigurationsmischungen auf die Fläche der ersten Anregungsenergie.

Durch die Konfigurationsmischungen wird nun auch befriedigend erklärt, weshalb nicht jeder Schalenabschluß zu einem Sprung der ersten Anregungsenergie führt. Beim Auffüllen der meisten Schalen ergibt sich nämlich gar kein scharfer Abschluß, sondern wegen der Mischbarkeit benachbarter Konfigurationen erfolgen stetige Übergänge. Nur jene Schalenabschlüsse erscheinen als «magische» Zahlen, bei welchen die Energiedifferenz zur nächsthöheren Schale so groß ist, daß im Grundzustand die Beimischungen höherer Konfigurationen vernachlässigt werden dürfen [58].

Selbstverständlich bestehen ähnliche Konfigurationsmischungen auch in den angeregten Zuständen. Im ersten Anregungszustand werden diejenigen Konfigurationen relativ stärker vertreten sein, welche zu einer tieferen Lage des ersten 2^+ -Zustandes Anlaß geben. Die frühere Aussage (Abschnitt 4.1), daß die erste Anregungsstufe der g - g -Kerne in der Regel der Grundkonfiguration angehöre, muß daher etwas abgeschwächt werden: Die tiefen Anregungszustände der g - g -Kerne gehören in der Regel bis auf kleine Änderungen der Mischverhältnisse derselben Konfigurationsmischung an wie der Grundzustand. Größere Abweichungen der Mischverhältnisse können bei höheren Anregungsenergien auftreten. Extreme Beispiele dafür sind etwa das Sr^{88} und das Pb^{208} , wo ohne Konfigurationsänderung überhaupt keine Anregung möglich wäre.

6. – Neutron-Proton-Resonanz.

6.1. – Tiefe 2^+ - Zustände der Protonen- und der Neutronenkonfiguration.

Bisher haben wir stets nur die Protonen- oder nur die Neutronenkonfiguration für sich allein betrachtet. Dies ist zulässig, wenn in einem Kern entweder alle Neutronen- oder alle Protonenschalen abgeschlossen sind. Die Mehrzahl der Kerne enthält jedoch gleichzeitig unabgeschlossene Protonen- und unabgeschlossene Neutronenschalen. In diesen Kernen sind grundsätzlich zwei verschiedene Arten der Anregung unterscheidbar. Ein tiefer Anregungszustand mit Spin zwei läßt sich nämlich einerseits bilden durch die Auf-

spaltung eines Protonenpaares, während die ganze Neutronenkonfiguration in ihrem Grundzustand bleibt. Solche Zustände werden wir im folgenden als « Protonenzustände » oder kurz *P-Zustände* bezeichnen; die zugehörigen Wellenfunktionen sollen den Index *p* tragen (ψ_p). Andererseits kann auch, während die Protonen im Grundzustand bleiben, die Anregung der Neutronen zu einem tiefen Zustand mit Spin zwei führen (*N-Zustände*, ψ_n).

Da mittlere und schwere Kerne stets mehr Neutronen als Protonen enthalten, gehören in diesen Kernen die anregbaren äußersten Neutronen höheren

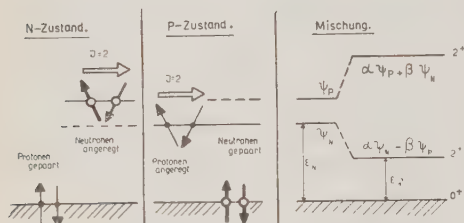


Fig. 6. — Definition der « *P-Zustände* » und der « *N-Zustände* » und Einfluß der *P-N-Resonanz* auf die Lage der ersten Anregungsstufe.

dieser Zustände (2^-) übereinstimmen und auch ihre Energien nicht sehr verschieden sind. (Beide Zustände liegen bei mittleren Kernen zwischen 1 MeV und ca. 2 MeV über dem Grundzustand, bei schweren Kernen liegen beide tiefer als 1 MeV).

Falls eine solche Resonanz tatsächlich vorhanden ist, so werden anstelle der nichtstationären Zustände ψ_p und ψ_n ihre Linearkombinationen auftreten:

$$\psi_I = \alpha\psi_n - \beta\psi_p; \quad \psi_{II} = \beta\psi_n + \alpha\psi_p,$$

Zur Berechnung der resultierenden Zustände ψ_I und ψ_{II} gilt derselbe Formalismus wie für die Konfigurationsmischungen (vgl. Abschnitt 5.2). Die Energiedifferenz der resultierenden Resonanzzustände ist größer als die der aktiven Ausgangszustände ψ_n und ψ_p . Da die mittlere Energie dabei jedoch dieselbe bleibt, rückt der tiefere der beiden Zustände infolge der Resonanz noch näher zum Grundzustand (Fig. 6). Die erste Anregungsenergie wird daher kleiner, wenn eine Wechselwirkung zwischen *P-* und *N-Zuständen* besteht.

Schalen an als die anregbaren äußersten Protonen. Im letzten Kapitel wurde eine Konfigurationswechselwirkung über die Schalenunterschiede hinweg nachgewiesen. Auch eine Wechselwirkung zwischen Protonen und Neutronen darf daher nicht zum vornehieren vernachlässigt werden.

Insbesondere ist mit einer Resonanz zwischen den oben definierten *P-* und *N-Zuständen* zu rechnen, da Spin und Parität

6.2. – Nachweis der P - N -Resonanz aus der Verteilung der ersten Anregungsenergien.

Dieser Effekt ist, wie aus der Fig. 7 hervorgeht, tatsächlich vorhanden. Die rechte Hälfte der Figur zeigt die Verteilung der ersten Anregungsenergien derjenigen Kerne, bei welchen sicher reine P - oder reine N -Zustände vorliegen. Es sind dies einerseits die Kerne mit «magischer» Protonenzahl, in welchen die Anregung der tiefsten Stufe nur die Neutronenkonfiguration betrifft, und andererseits die Kerne mit «magischer» Neutronenzahl, wo allein die Protonen zum ersten Anregungszustand beitragen. In allen diesen Kernen ist die erste Anregungsenergie relativ hoch.

Viel tiefer liegen die ersten Anregungsenergien in der umfangreicheren Gruppe der Kerne, in welchen weder die Neutronen- noch die Protonenzahl «magisch» ist (Fig. 7, linke Hälfte). Dies beweist, daß die P - N -Wechselwirkung nicht zu vernachlässigen ist, und daß die ersten Anregungszustände der g - g -Kerne im allgemeinen durch eine gemeinsame Anregung der Protonen und der Neutronenstruktur erklärt werden müssen.

Der P - N -Wechselwirkung ist es zuzuschreiben, daß die erste Anregungsenergie ebenso von der Neutronenzahl wie von der Protonen-

zahl abhängt. Um diese doppelte Abhängigkeit nachzuweisen, haben wir in einer früheren kurzen Mitteilung [3] die Zerlegung der tiefsten Anregungsenergien in die Summe zweier Funktionen versucht, welche je nur von der Protonen- bzw. der Neutronenzahl abhängen sollte. Dadurch gelang in gewissen Bereichen eine überraschend gute Annäherung für die Fläche der ersten Anregungsenergie. Da diese Art der Beschreibung jedoch speziell in der Umgebung der magischen Zahlen versagt, soll sie hier durch eine detaillierte Untersuchung der P - N -Wechselwirkung zwischen den einzelnen Schalen ersetzt werden.

6.3. – P - N -Resonanz zwischen verschiedenen Schalen.

Die P - N -Resonanz wurde im vorigen Abschnitt aus der mittleren Verteilung der Anregungsenergien hergeleitet. Anhand der Fig. 1 P und $1 N$ sollen nun die Auswirkungen der P - N -Resonanz auch an einzelnen Beispielen untersucht

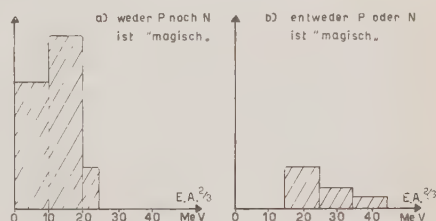


Fig. 7. – Verteilung der mit $A^{2/3}$ multiplizierten Anregungsenergien in zwei Gruppen von g - g -Kernen: a) in Kernen, in welchen P - N -Resonanz zu erwarten ist; b) in Kernen, in welchen nur reine P -Zustände oder reine N -Zustände auftreten können.

werden. Besonders ist darauf zu achten, zwischen welchen Schalen eine P - N -Wechselwirkung festgestellt werden kann. Das « periodische System » der Kerne wird dazu in einzelne Gebiete zerlegt (*):

$$a) \quad 20 \leq P \leq 28; \quad 20 \leq N \leq 28 \quad (1f^{7/2})_P - (1f^{7/2})_N.$$

Eine P - N -Wechselwirkung ist in erster Linie bei diesen leichten Kernen zu erwarten, wo die anregbaren äußersten Protonen und die anregbaren äußersten Neutronen derselben Schale angehören. Von dieser Art ist die Wechselwirkung im Gebiet der $(1f^{7/2})$ -Schale, wo die Mischzustände $(22; 24)$ und $(22; 26)$ fast nur halb so hoch liegen wie der reine P -Zustand $(24; 28)$. (Fig. 1 N).

$$b) \quad 20 \leq P \leq 28; \quad 28 \leq N \leq 38 \quad (1f^{7/2})_P - (1f^{5/2}; 2p^{3/2})_N.$$

Im $(28; 32)$ liegt ein reiner N -Zustand vor, welcher zeigt, daß die Konfiguration der 32 Neutronen allein eine relativ hohe Anregungsenergie benötigt. Der Zustand $(26; 32)$ liegt dagegen fast um die Hälfte tiefer. Daran kann nicht allein die Konfiguration der 26 Protonen schuld sein; $(24; 28)$ müßte nämlich sonst ebenso tief liegen. Die tiefe Lage des $(26; 32)$ muß daher der Resonanz $(1f^{7/2}) - (1f^{5/2}; 2p^{3/2})$ zugeschrieben werden. Beachtenswert ist, daß hier die Resonanz zwischen zwei verschiedenen Schalen Niveaushiftungen von ungefähr der Größe ergibt wie die Resonanz innerhalb einer einzigen $(1f^{7/2})_{P,N}$ -Schale (vgl. Abschnitt a).

$$c) \quad 28 \leq P \leq 38; \quad 38 \leq N \leq 50 \quad (1f^{5/2}; 2p^{3/2})_P - (1g^{9/2})_N.$$

In diesem Gebiet läßt sich eine P - N -Resonanz nicht so sicher nachweisen. Einerseits liegen die reinen N -Zustände, der $(1f^{5/2}; 2p^{3/2})_N$ -Schale relativ hoch. Es sind dies die Zustände $(28; 32)$, $(28; 34)$ und $(28; 36)$. Ebenso hoch liegen andererseits auch die Zustände $(40; 52)$ und $(42; 52)$ in der $(1g^{9/2})_N$ -Schale. Wegen der Äquivalenz der Proton-Proton- und der Neutron-Neutron-Kräfte darf man vermutlich die Rollen der Neutronen und Protonen vertauschen: reine N -Zustände der $(1g^{9/2})_N$ -Schale und reine P -Zustände der $(1f^{5/2}; 2p^{3/2})_P$ -Schale liegen wahrscheinlich auch relativ hoch. Die tiefe Lage der Mischzustände $(32; 40)$, $(32; 42)$, $(34; 40)$ und $(34; 42)$ wäre dann wiederum auf die Resonanz zwischen den erwähnten Schalen zurückzuführen.

$$d) \quad 50 \leq P \leq 58; \quad 66 \leq N \leq 82 \quad (1g^{7/2}; 2d^{5/2})_P - (1h^{11/2}; 2d^{3/2})_N.$$

Die Abhängigkeit von der Protonenzahl und die Abhängigkeit von der Neutronenzahl überlagern sich in diesem Gebiet sehr deutlich. Wenn die

(*) Anstelle des oft wiederkehrenden Ausdruckes « die tiefste Anregungsenergie des Kernes mit x Protonen und y Neutronen » wird im folgenden die Abkürzung $(x; y)$ verwendet. Für die Resonanz zwischen der Anregung der Protonenschale (n, l, j) und der Anregung der Neutronenschale (n', l', j') setzen wir symbolisch $(n, l, j)_P - (n', l', j')_N$.

Neutronenzahl gegen 82 ansteigt, so wachsen auch die Anregungsenergien sehr stark (Fig. 1 N). Diesem Anstieg überlagert sich der starke Abfall der Anregungsenergie, wenn die Protonenzahl von der Schalengrenze 50 wegrückt (Fig. 1 P). Beide Einflüsse sind etwa gleich groß. Dies zeigt, daß die Anregung der Protonenkonfiguration und die Anregung der Neutronenkonfiguration im Mittel etwa gleichviel zu den ersten Anregungszuständen beitragen.

$$e) \quad 62 \leq P \leq 82; \quad 90 \leq N \leq 126 \quad (1h^{11}/2; 2d^3/2)_P - (1h^9/2; 1i^{13}/2)_N.$$

Unglücklicherweise werden in den stabilen Kernen die beiden Schalenabschlüsse bei $P=82$ und bei $N=126$ gleichzeitig erreicht. Unter den schweren Kernen finden sich deshalb kaum solche, bei denen wir zum vorneherein wissen, daß reine P - oder reine N -Zustände vorliegen, und wir können deshalb auch nicht die Energien vermutlicher Mischzustände mit den Energien reiner Zustände vergleichen.

Beim Anstieg der Anregungsenergien gegen $N=126$ erkennt man in Fig. 1 N neben dem starken Einfluß der Neutronenzahl ebenso deutlich auch den Einfluß der Protonenzahl auf die Anregungsenergie. Auch schon vorher, im Gebiet der seltenen Erden, wo die Anregungsenergien sehr tief liegen und wo die Punkte in Fig. 1 P und 1 N nahezu auf einer einzigen Kurve liegen, zeigt sich doch die gleichzeitige Abhängigkeit von der Neutronen- und der Protonenzahl darin, daß alle die kurzen Kurvenstücke in Fig. 1 richtig nach ihrem Parameter geordnet sind.

$$f) \quad 82 = P; \quad 126 = N \quad (1h^9/2; 2f^7/2; 1i^{13}/2)_P - (2g^9/2; 1i^{11}/2)_N.$$

Auch bei den schwersten Kernen sind in Fig. 1 P und in Fig. 1 N die Punkte und Kurvenstücke richtig nach ihren Parametern geordnet. Daraus ist wiederum auf eine Wechselwirkung der äußersten Protonen- und Neutronenschalen zu schließen.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß sich die Wirkung der P - N -Resonanzen eindeutig nachweisen läßt. Die Resonanzenergien sind dabei von der Größenordnung der Anregungsenergien. Die P - N -Resonanz beschränkt sich nicht auf Protonen und Neutronen einer einzigen Schale; sie wirkt ebenso stark auch in Fällen, wo sich Neutronen und Protonen in verschiedenen Schalen des j - j -gekoppelten Modelles aufhalten. Beispiele dafür sind:

$$b) \quad (1f^7/2)_P - (1f^5/2; 2p^3/2)_N$$

$$c) \quad (1f^5/2; 2p^3/2)_P - (1g^9/2)_N$$

$$d) \quad (1g^7/2; 2d^5/2)_P - (1h^{11}/2; 2d^3/2)_N$$

$$e) \quad (1h^{11}/2; 2d^3/2)_P - (1h^9/2; 1i^{13}/2)_N$$

$$f) \quad (1h^9/2; 2f^7/2; 1i^{13}/2)_P - (2g^9/2; 1i^{11}/2)_N.$$

In allen diesen Beispielen können wir nicht exakt angeben, zwischen welchen Schalen die P - N -Wechselwirkung erfolgt. Da in der Regel verschiedene Konfigurationen gemischt auftreten (vgl. Kap. 5), können wir nur Schalengruppen nennen, zwischen welchen die Resonanz beobachtet wird. Außer im unsichern Beispiel c) sind in diesen Gruppen stets Paare von Schalen enthalten, welche sich nur durch die Spin-Bahn-Kopplung unterscheiden, während das Bahnmoment, und die radiale Knotenzahl in beiden Schalen gleich sind (diese Schalenpaare sind in der obigen Zusammenstellung jeweils unterstrichen). Es ist daher vorläufig nicht auszuschließen, daß nur diese Paare für die Proton-Neutron-Resonanz verantwortlich sind.

7. – Ergebnisse und Diskussion.

7.1. – Voraussage der tiefsten Anregungsenergie.

Die phäenomenologischen Regeln über die tiefste Anregungsenergie der g - g -Kerne haben sich bereits als Grundlage experimenteller Arbeiten bewährt (Kap. 3). Die Regeln ermöglichen es einerseits, anhand der Fig. 1 N und 1 P die Lage der ersten Anregungsstufe in bisher noch nicht untersuchten Kernen vorauszusagen. Andererseits bilden die Regeln auch einen wertvollen Anhaltspunkt zur Kontrolle gefundener Zerfallsschemata. Es kommt vor, daß im Experiment durch unglückliche Zufälle falsche Zusammenhänge vorgetäuscht werden, indem etwa die Halbwertszeiten zweier Aktivitäten nahezu gleich sind (Sn^{120} und Sn^{116} , Cl^{33} und Cl^{34} , Te^{92} und Te^{93*}), oder es gibt Fälle, wo eine entscheidende Linie eines Spektrums von einer benachbarten intensiveren Linie überstrahlt wird (Hg^{196}). In solchen Fällen können die zusätzlichen Kriterien, welche eine Systematik der ersten Anregungszustände bietet, zur Aufdeckung allfälliger Fehler beitragen und den Weg zu einem zweckmäßigeren experimentellen Vorgehen weisen.

7.2. – Konfigurationsmischungen.

Über die phäenomenologischen Regeln hinaus erhält man allgemeinere Ergebnisse durch die konsequente Anwendung des Schalenmodells auf die tiefsten Anregungszustände. Das Fehlen tiefliegender Isomere und der glatte Verlauf der Fläche für die tiefste Anregungsenergie beweisen eine starke Konfigurationswechselwirkung (Kap. 5). Diese beschränkt sich nicht auf Teilchen mit gleichem Isotopenspin; die Wechselwirkung ist ebenso wirksam zwischen

der letzten ungefüllten Neutronenschale und der letzten ungefüllten Protonenschale (Kap. 6).

Für die Größe der Wechselwirkungsenergie benachbarter Konfigurationen fanden wir im Abschnitt 5.2 die untere Grenze $8 \text{ MeV} \cdot A^{2/3}$. Verglichen mit der Schalenenergie der zuletzt eingebauten Nukleonen ist dies eine kleine Störung. Nach JENSEN [57] beträgt beispielsweise die Energie einzelner Nukleonen in der $(1g^{9/2})$ -Schale ca. $400 \text{ MeV} \cdot A^{2/3}$.

Die Wechselwirkungsenergie ist jedoch groß genug, um in Einzelfällen nicht nur die Niveaudistanzen sondern gar die Niveaufolge entscheidend zu beeinflussen. Die gefundene untere Grenze der Wechselwirkungsenergie $8 \text{ MeV} \cdot A^{-2/3}$ bedeutet nämlich in mittleren Kernen 500 bis 1000 keV. Die Wechselwirkungsenergie ist damit von derselben Größenordnung wie die beobachteten Niveaudistanzen.

Beispiele einer Vertauschung der Niveaufolge sind auch bei den Kernen mit ungerader Massenzahl bekannt. So tritt im ${}_{11}\text{Na}^{23}$ mit der Protonekonfiguration $(d^{5/2})^3$ im Grundzustand nicht der Spin 5/2 sondern der Spin 3/2 auf. Wegen der Mischbarkeit mit dem tiefsten Zustand der nächsthöheren Konfiguration $(d^{5/2})(d^{3/2})^1$ wird nämlich in der Grundkonfiguration der Zustand mit dem Spin 3/2 energetisch bevorzugt [32]. Ebenso ist der Grundzustand des ${}_{25}\text{Mn}^{55}$ mit dem Ausnahmespin 5/2 durch die Mischung der Konfigurationen $(f^{7/2})^5$ und $(f^{7/2})^4(f^{5/2})^1$ zu erklären. Ganz analog ist auch die überraschend tiefe Lage der $(1g^{9/2})^{3,5,7}$ -Zustände mit Spin 7/2 zu verstehen. Die Versuche, in solchen Fällen aus den beobachteten Niveaudistanzen Schlüsse auf die Reichweite der Kernkräfte zu ziehen [45, 59] müssen deshalb scheitern, solange die Konfigurationswechselwirkung dabei vernachlässigt wird.

7.3. — Konfigurationsmischungen und Matrixelemente.

Die Berücksichtigung der Konfigurations-Wechselwirkung bedeutet eine beträchtliche Komplikation für die Anwendungen des Schalenmodells. Da jedoch nur energetisch benachbarte Konfigurationen wesentlich zu Mischungen beitragen, kann man für jeden Kern auf Grund des Schalenmodells die Anzahl der in Betracht fallenden Konfigurationen schon stark einschränken. Grundsätzlich besteht dann weiter die Möglichkeit, aus beobachteten β - oder γ -Matrixelementen auf die Mischverhältnisse der Konfigurationen zu schließen. Bereits haben SUNYAR und GOLDBERGER [60] in einem einzelnen Fall, nämlich für den ersten Anregungszustand des Rb^{85} , das Mischverhältnis zweier Konfigurationen aus den ft -Werten bestimmt. Es ist zu hoffen, daß es durch den systematischen Vergleich empirischer Matrixelemente einmal gelingen wird, die Konfigurationsmischungen in ganzen Reihen benachbarter Kerne zu bestimmen.

Bisher kann jedoch die genaue Konfiguration nur in wenigen Ausnahmefällen angegeben werden. Besonders in den schwersten Kernen, wo die Mischmöglichkeiten am zahlreichsten sind, scheint deshalb ein kollektives Modell zur Beschreibung höherer Anregungszustände vorläufig am besten geeignet [50].

Zum Schlusse möchten wir Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit und für die Mittel, welche er uns zur Verfügung stellte, unsern besten Dank aussprechen.

Für die Mithilfe bei einigen Messungen danken wir den Herren cand. phys. W. ARBER (Untersuchung des Cl^{31}), cand. phys. M. HAFTER (Sb^{116}) und stud. phys. K. STELZER (Au^{196}). Ebenso danken wir auch den Chemikern an unserem Institut, Herrn Dr. P. JORDAN und Herrn M. POCHON für die Ausführung der notwendigen Trennungen.

LITERATUR

- [1] M. GOEPPERT-MAYER: *Phys. Rev.*, **75**, 1969 (1949).
- [2] R. D. HILL: *Phys. Rev.*, **79**, 1021 (1950).
- [3] P. STÄHELIN und P. PREISWERK: *Helv. Phys. Acta*, **24**, 623 (1951).
P. PREISWERK und P. STÄHELIN: *Physica*, **18**, 1118 (1952).
- [4] G. SCHARFF-GOLDHABER: *Phys. Rev.*, **87**, 218 (1952); *Physica*, **18**, 1105 (1952); *Phys. Rev.* **90**, 587 (1953).
- [5] M. GOLDHABER, E. DER MATEOSIAN, G. SCHARFF-GOLDHABER und A. W. SUNYAR: *Phys. Rev.*, **83**, 661 (1951).
- [6] M. GOLDHABER und A. W. SUNYAR: *Phys. Rev.*, **83**, 906 (1951).
- [7] G. SCHARFF-GOLDHABER: *Physica*, **18**, 1105 (1952).
- [8] J. M. HOLLANDER, J. PERLMANN, G. T. SEABORG: *UCRL*, Report 1928 (University of California, Radiation Laboratory, (1952).
- [9] F. AJZENBERG und T. LAURITSEN: *Rev. Mod. Phys.*, **24**, 321 (1952).
- [10] D. E. ALBURGER und E. M. HAFNER: *Rev. Mod. Phys.*, **22**, 373 (1950).
- [11] *Nuclear Data, National Bureau of Standards Circular 499* plus drei Supplemente (1950-51).
- [12] J. C. BOWE, M. GOLDHABER, R. D. HILL, W. E. MEYERHOF und O. SALA: *Phys. Rev.*, **73**, 1219 (1948).
- [13] C. M. HUDDLESTON und A. C. G. MITCHELL: *Phys. Rev.*, **88**, 1350 (1952).
- [14] P. PREISWERK und P. STÄHELIN: *Helv. Phys. Acta*, **24**, 300 (1951).
- [15] H. MEDICUS, P. PREISWERK und P. SCHERRER: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 299 (1950).
- [16] D. N. KUNDU und M. L. POOL: *Phys. Rev.*, **74**, 1775 (1948).
- [17] D. MAEDER und P. PREISWERK: *Helv. Phys. Acta* **24**, 625 (1951).
- [18] M. GOODRICH und E. C. CAMPBELL: *Phys. Rev.*, **85**, 742 (1952).
- [19] R. H. NUSSBAUM: demnächst in *Physica*.
- [20] W. A. THORNTON, E. DER MATEOSIAN, H. T. MOTZ und M. GOLDHABER: *Phys. Rev.*, **86**, 604 (1952).
- [21] R. W. PRINGLE, S. STANDIL, H. W. TAYLOR und G. FRAYER: *Phys. Rev.*, **84**, 1066 (1952).

- [22] C. T. HIBDON und C. O. MUELHAUSE: *Phys. Rev.*, **88**, 943 (1952).
- [23] R. KATZ und M. R. LEE: *Phys. Rev.*, **85**, 1038 (1952).
- [24] T. C. CHU: *Phys. Rev.*, **79**, 582 (1950).
- [25] J. M. CORK, J. M. LEBLANC, A. E. STODDARD, W. J. CHILDS, C. E. BRANYAN und D. W. MARTIN: *Phys. Rev.*, **82**, 258 (1951).
- [26] P. STÄHELIN: *Phys. Rev.*, **87**, 374 (1952).
- [27] S. ROSENBLUM, M. VALDARES und M. GUILLOT: *Compt. Rend. Paris*, **234**, 1767 (1952).
- [28] D. C. DUNLAVEY und T. SEABORG: *Phys. Rev.*, **87**, 165 (1952).
- [29] L. RUBY und J. R. RICHARDSON: *Phys. Rev.*, **83**, 698 (1951).
- [30] D. MAEDER und V. WINTERSTEIGER: *Phys. Rev.*, **87**, 537 (1952) und *Physica*, **18**, 1147 (1952).
- [31] M. E. ROSE, G. H. GOERTZEL, B. J. SPINRAD, J. HARR und P. STRONG: *Phys. Rev.*, **83**, 79 (1951).
- [32] B. H. FLOWERS: *Proc. Roy. Soc., A* **212**, 248 (1952); *A* **215**, 398 (1952); *Phys. Rev.*, **86**, 254 (1952); *Physica*, **18**, 1101 (1952).
- [33] F. J. BOLEY und D. J. ZAFFARANO: *Phys. Rev.*, **84**, 1059 (1951).
- [34] J. B. HOAG: *Phys. Rev.*, **57**, 937 (1940).
- [35] A. D. SCHELLBERG, M. B. SAMPSON und A. C. G. MITCHELL: *Rev. Scient. Instr.*, **19**, 458 (1948).
- [36] G. E. VALLEY und R. L. MACCREARY: *Phys. Rev.*, **56**, 863 (1939).
- [37] P. MARMIER und P. PREISWERK: unveröffentlicht.
- [38] H. T. ESTERDAY und H. A. MEDICUS: *Phys. Rev.*, **89**, 752 (1953).
- [39] M. L. POOL und J. E. EDWARDS: *Phys. Rev.*, **67**, 60 (1945).
- [40] D. N. KUNDU und M. L. POOL: *Phys. Rev.*, **71**, 140 (1947).
- [41] G. M. TEMMER: *Phys. Rev.*, **76**, 424 (1949).
- [42] J. P. BLASER, F. BOEHM und P. MARMIER: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 623 (1950).
- [43] J. P. BLASER, F. BOEHM, P. MARMIER und P. SCHERRER: *Helv. Phys. Acta*, **24**, 441 (1951).
- [44] H. SLÄTIS, S. J. DUTOIT und K. SIEGBAHN: *Phys. Rev.*, **78**, 498 (1950).
- [45] D. KURATH: *Phys. Rev.*, **80**, 98 (1950).
- [46] R. M. STEFFEN, O. HUBER und F. HUMBEL: *Helv. Phys. Acta*, **22**, 167 (1949).
- [47] O. HUBER, F. HUMBEL, H. SCHNEIDER und A. DESHALIT: *Helv. Phys. Acta*, **25**, 3 (1952).
- [48] F. ASARO und J. PERLMANN: *Phys. Rev.*, **87**, 393 (1952).
- [49] A. H. WAPSTRA: *Dissertation, Univ. Amsterdam* (1953).
- [50] A. BOHR und B. R. MOTTELSON: *Phys. Rev.*, **89**, 316 (1953) und *Phys. Rev.*, **90**, 717 (1953).
- [51] P. MACKLIN, L. LIDOFKY und C. S. WU: *Phys. Rev.*, **78**, 391 (1952).
- [52] M. GOLDBABER und R. D. HILL: *Rev. Mod. Phys.*, **24**, 179 (1952).
- [53] K. GEIGER: *Zeits. f. Naturforschung*, **5a**, 401 (1950).
- [54] H. J. MAEHLY und P. STÄHELIN: *Helv. Phys. Acta*, **25**, 624 (1952).
- [55] B. H. FLOWERS: *Proc. Roy. Soc., A* **210**, 497 (1952).
- [56] J. A. HARWEY: *Phys. Rev.*, **81**, 353 (1951).
- [57] O. HAXEL, J. H. JENSEN und H. E. SUESS: *Erg. exakt. Natwiss.*, **26**, 265 (1952).
- [58] L. W. NORDHEIM: *Phys. Rev.*, **75**, 1894 (1949).
- [59] J. TALMI: *Helv. Phys. Acta*, **25**, 185 (1952).
- [60] A. W. SUNYAR, J. W. MIHELICH, G. SCHARFF-GOLDBABER und M. GOLDBABER: *Phys. Rev.*, **86**, 1023 (1952).

RIASSUNTO (*)

L'introduzione si richiama a precedenti brevi comunicazioni sul primo stato eccitato dei nuclei pari (Cap. 1). Un breve esame mostra che la più bassa energia di eccitazione dei nuclei pari-pari è una funzione continua del numero dei neutroni e dei protoni. In serie di nuclei vicini l'energia di eccitazione cresce se il numero dei protoni o dei neutroni si avvicina al prossimo numero magico (Cap. 2). Sono stati riesaminati sperimentalmente alcuni nuclei che sembravano disobbedire a questa regola ed in ogni caso i nuovi risultati ottenuti confermano la regola (Cap. 3). La radiazione di 145 keV che accompagna la trasformazione di Cl^{34} in S^{34} [29] è dovuta a una transizione isomerica ($M3$) tra lo stato 33-min noto e lo stato fondamentale di Cl^{34} , il cui semiperiodo è 1,45 s. Una transizione $0^+ \rightarrow 0^+$ con valore ft di 2700 s porta direttamente allo stato fondamentale dell' S^{34} (3·2). Due differenti isotopi dell'antimonio, Sb^{120} e Sb^{116} hanno semiperiodi indistinguibili di (16 ± 2) min. Il livello a 1.3 MeV che precedentemente si attribuisce all' Sb^{120} [42] appartiene allo Sn^{116} . L'attività di 60 min con emissione γ di 0,70 MeV [41] deve probabilmente essere riassegnata al numero di massa 115 (invece del 116) (3·10). Nel Hg^{196} non si è potuto confermare la radiazione γ di 175 keV riportata [46] e si è trovato una nuova riga corrispondente a un primo livello a 426 keV, che si accorda con le nostre regole (3·13). Ulteriori esperimenti sono stati eseguiti con Mo^{96} , Zr^{92} , e Mo^{92} . La dipendenza della più bassa energia d'eccitazione dal numero dei neutroni e dei protoni è interpretata in termini del modello a strati (Cap. 4). Si dimostra che si deve ammettere una forte interazione fra le configurazioni (Cap. 5) e che in generale il primo stato eccitato è dovuto a una eccitazione simultanea della struttura neutronica e protonica (Cap. 6).

(*) Traduzione a cura della Redazione.

An Analysis of "Jets" initiated by High Energy Cosmic Rays.

C. C. DILWORTH (*) and S. J. GOLDSACK (**)

Centre de Physique Nucléaire de l'Université Libre - Bruxelles

T. F. HOANG

Laboratoire de Physique de l'École Polytechnique - Paris

L. SCARSI

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Milano

(ricevuto il 15 Giugno 1953)

Summary. — A study has been made of the variation of the multiplicity of «jets» with the energy of the primary, deduced from the angular distribution of the secondaries. The analysis has been made both on the hypothesis of pure multiple production, and following the model of ROESLER and McCUSKER of production in a «tunnel» through the nucleus.

Introduction.

For some time past, various authors have published examples of stars observed in photographic emulsions, which seem to involve multiple production of mesons, and yet considerable confusion remains on the interpretation of the results ⁽¹⁾.

Detailed studies of such stars ^(2,3) together with observations on the se-

(*) Aggregato alla Sezione di Milano dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare.

(**) Now at Physical Laboratories, University of Manchester.

⁽¹⁾ For a general survey see B. ROSSI: *High Energy Particles* (Prentice Hall, 1952). and R. MARSHAK: *Meson Physics* (New York, 1952).

⁽²⁾ V. D. HOPPER, S. BISWAS and J. F. DARBY: *Phys. Rev.*, **84**, 457 (1951).

⁽³⁾ M. DEMEUR, C. C. DILWORTH and M. SCHÖNBERG: *Nuovo Cimento*, **9**, 92 (1952).

condary interactions (produced presumably by mesons) ⁽⁴⁾, have suggested that the conflation of the results might be due to the existence of two types of such stars.

In this paper an analysis is made of stars of the type which can be attributed to multiple production of mesons.

A recent article of ROESLER and MCCUSKER ⁽⁵⁾ indicates that high energy showers accompanied by few evaporation particles can be produced during a collision in which the primary blasts a «tunnel» right through the nucleus and still gives to it a rather small excitation energy. An analysis of the results is also made on this model.

1. — Experimental method.

From stars found in plates exposed in balloon flights and on mountains we selected stars with 4 or more shower particles and 4 or less evaporation tracks (jets), with either singly charged or neutral primaries, and measured the angles in space (*) with respect to the primary, where it was visible, or with respect to the axis of the cone of the shower particle if the primary was neutral.

The measurement of these angles and the count of the total multiplicity are the only observations which have been made on most of the stars. The angular distribution of the secondaries enables one to determine the energy of the primary which produced the star.

On one star, previously published ⁽³⁾ scattering measurements were possible on all the secondaries, and these were made to determine the energies of the mesons.

Measurements of the angular distribution of showers produced by high

⁽⁴⁾ D. LAL, L. PAL, B. PETERS and M. S. SWAMI: *Proc. Ind. Acad. Sc.*, **36**, 75 (1952).

⁽⁵⁾ F. C. ROESLER and C. B. A. MCCUSKER: *Nuovo Cimento*, **10**, 127 (1953).

(*) The problem of calculating the angle between two tracks given the angles projected in the horizontal and vertical planes, occurs frequently in emulsion work. It is exactly analogous to the problem of navigation between two points of which the latitude and longitude are known, for the solution of which very precise curves exist, but which seem to be unknown to most workers in nuclear emulsions. Our attention has been drawn to two excellent examples of such curves ^(6,7) by Mlle PRUNIÈRES and Mr. PLAINEVAUX. We take this opportunity to thank them for this service which has saved us a great deal of laborious trigonometrical calculation.

⁽³⁾ P. CONSTAN: *Tables Graphiques d'Azimuts et Tables Nautiques* (Société d'Éditions Géographiques, Maritimes et Coloniales, Paris, 1927).

⁽⁷⁾ *Determination Graphique du Point à la Mer*. Méthode de M. M. Fové et Rollet de l'Isle.

energy α particles have also been made, but the results are not given here. The analysis of these showers is more complicated and will be discussed in a future publication.

2. - Analysis on the basis of pure multiple production.

Supposing a shower to be produced, in a single nucleon-nucleon collision, and that the velocities β'_p of the primary and β'_m of the secondary particles in the centre of mass system of coordinates (*C*-system) are close to unity, the energy of the primary can be estimated from the angular distribution of the shower in the Laboratory system of coordinates (*L*-system). The Lorentz transformation is applied to find the energy of the primary which gives a symmetrical angular distribution in the *C*-system. Several criteria of symmetry are possible, and the calculations are given in Appendix I.

The simplest method is to determine the median angle $\theta_{1/2}$, from which $\gamma' = (1 - \beta_p'^2)^{-1/2}$ can be calculated from the formula

$$(1) \quad \gamma' = \cot \theta_{1/2},$$

β'_p is the velocity of the primary in the *C*-system (or equivalent that of the *C*-system with respect to the *L*-system).

A more general formula from which further information may be obtained is

$$(2) \quad \gamma'^2 = \cot \theta_f \cot \theta_{1-f},$$

where f is the angle in the *L*-system which contains a fraction f of the particles, and θ_{1-f} is that containing a fraction $(1-f)$. Equation (1) is a special case of equation (2).

Lastly, a statistical calculation based on the method of maximum likelihood leads to the expression

$$(3) \quad \frac{N_s}{2\gamma'^2} = \sum_{i=1}^{N_s} \frac{1}{\gamma'^2 + \cot^2 \theta_i}.$$

This has the advantage of permitting the calculation of the asymptotic value of the statistical error (*)

$$(4) \quad \frac{\varepsilon(\gamma')}{\gamma'} = \sqrt{\frac{3}{4(N_s - 1)}}.$$

Fig. 1 is a plot, for a proportion of the stars, of γ' obtained from formula (2) against that obtained from formula (3). The agreement is good, and we have

(*) We regret that owing to an error of calculation, this formula was incorrectly given in our previous publication (¹³). The diagram in that article also requires correction for this error.

felt justified in taking values of γ' obtained by any of the three methods, and attributing to them the order of magnitude of the error given by equation (4).

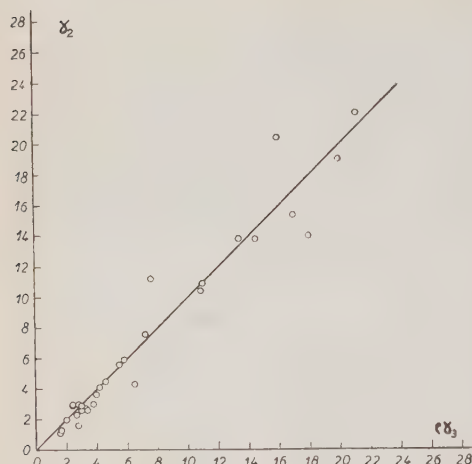


Fig. 1. — Comparison of the results of the calculation of the energy of the primary by the use of equations (2), γ_2 , and equation (3), γ_3 .

some of the shower particles can be protons. On the supposition that the shower is produced in a single nucleon-nuclear collision, N_m can be equal either to N_s , $N_s - 1$, or $N_s - 2$. The value $N_m = N_s - 1$ is the most probable, and the limits of possible error are ± 1 . There is also a statistical fluctuation on the ratio of charged to neutral mesons produced in a collision. If we suppose 2/3 of all mesons produced are charged the total error is found to be

$$(5) \quad \varepsilon(N_m) = \sqrt{\frac{N_s}{3} + 1},$$

Fig. 2 is a plot of the observed multiplicity ($N_s - 1$) against the estimated energy expressed in terms of γ' for stars with $0 \leq N_h \leq 2$. These include stars observed by the authors and points obtained from the published results of other workers ^(8, 9, 10, 11).

⁽⁸⁾ R. R. DANIEL, J. DAVIES, J. H. MULVEY and D. H. PERKINS: *Phil. Mag.*, **43**, 753 (1952).

⁽⁹⁾ E. PICKUP and L. VOJVODIC: *Phys. Rev.*, **84**, 1190 (1951).

⁽¹⁰⁾ J. J. LORD, J. FAINBERG and M. SCHEIN: *Phys. Rev.*, **80**, 970 (1950).

⁽¹¹⁾ K. GOTTSTEIN and M. TEUCHER: *Zeits. Naturforsch.*, **8a**, 120 (1953).

These three formulae are not strictly rigorous, since they do not take into account the tracks which may be emitted close to the axis in the backward cone and which are brought into the inner cone in the Laboratory system if the velocity of the primary is greater than that of the secondaries in the *C*-system.

An estimate of the error introduced if $\beta'_p \neq \beta'_m$ is given in Appendix II. It is shown that the effect is to introduce a relative error of the order of $\varepsilon = \pm (1 - \beta'_m/\beta'_p)$ which is always smaller than the experimental errors.

The number of charged mesons N_m present in the shower is not known exactly, since

There seems to be a separation of the points into two groups, one of low, and the other of much higher multiplicity. Further statistics will be needed to confirm the existence of two groups.

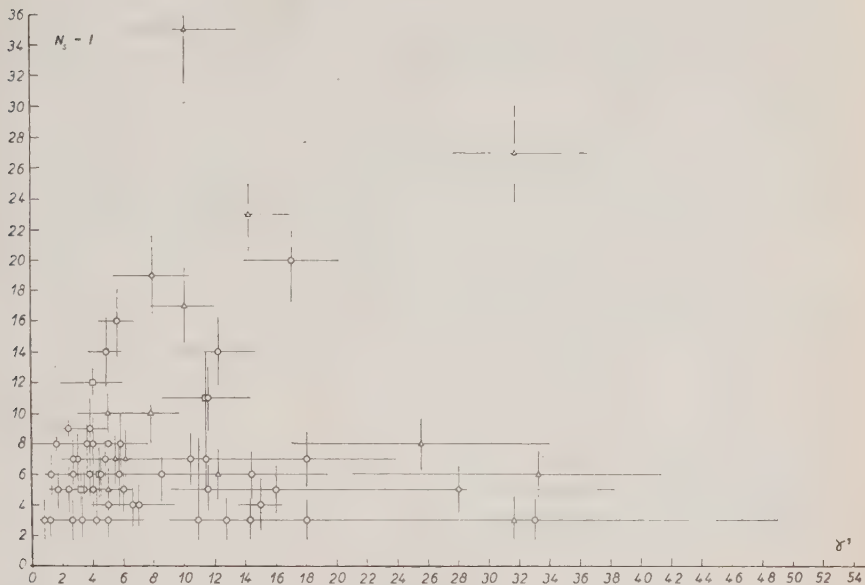


Fig. 2. — A plot of $(N_s - 1)$ against γ' for the jets with $N_h \leq 2$.

Fig. 3 shows the analogous points for stars with $3 \leq N \leq 4$. There appears (in this case) to be a group of points corresponding to a very low energy associated with high multiplicity.

Energy consideration in the C-system. — Assuming that the mesons are produced in the C-system with a mean energy $\bar{\gamma}'_m$, it is possible to estimate $\bar{\gamma}'_m$ from the limiting angle, θ_{lim} , of the shower, as observed in the laboratory system [cf. HOANG ⁽¹²⁾]

$$(6) \quad \sin \theta_{\text{lim}} = \frac{\sqrt{\bar{\gamma}'_m{}^2 - 1}}{\sqrt{\gamma'^2 - 1}} \approx \frac{\bar{\gamma}'_m}{\gamma'}.$$

Hence a degree of inelasticity k can be computed by the following relation

⁽¹²⁾ T. F. HOANG: *Journ. Phys. Rad.* (sous presse).

which expresses the energy balance in the C -system,

$$(7) \quad k2(\gamma - 1) = 1.5n_{\pm} \bar{\gamma}_m / \mu,$$

where μ is the ratio of the mass of the nucleon to that of the meson and $1.5n_{\pm}$ is the total number of mesons (charged and neutral) produced in the collision.

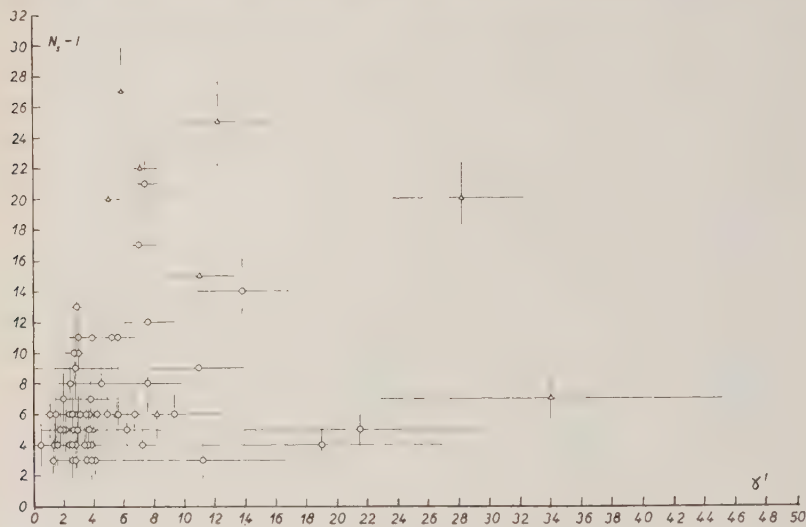


Fig. 3. - A plot of $(N_s - 1)$ against γ' for jets with $3 \leq N_h \leq 4$.

If all the mesons produced are assumed to be π mesons, (which we know from recent published results ⁽⁸⁾ is not the case), the values of k thus obtained are, within the statistical fluctuations, close to unity for the high multiplicity jets. This means that all the energy can be accounted for by the production of π -mesons. On the other hand, for the low multiplicity jets we find $k \approx 0.2$, so that only a fraction of the energy released by the nucleons in the $C.M.$ system is used in the production of π -mesons. There remains sufficient energy to account for a proportion of heavy mesons.

This apparent failure of energy balance has already been noticed by HOPPER *et al.* ⁽²⁾ and by DEMEUR *et al.* ⁽³⁾. In these cases the energy of the secondaries was actually measured by the scattering method and compared with that obtained from the angular distribution. We regret that the article of HOPPER *et al.* was overlooked when we published our earlier notes ^(3, 13).

⁽¹³⁾ C. C. DILWORTH, S. J. GOLDSACK, T. F. HOANG and L. SCARSI: *Compt. Rend.* (20 Aprile 1952).

3. - Analysis on the basis of the " Tunnel " model.

According to a recent theory proposed by ROESLER and MCCUSKER⁽⁵⁾, jets with $N_h \leq 4$ produced by a primary of more than a certain energy can be attributed to a « tunnelling » of the primary through the nucleus, i.e. the secondaries are produced in a cascade by successive collisions with nucleons contained in a cylinder of cross-section about equal to that of the nucleon. This tunnel can lie along the diameter or any chord, of the nuclear sphere. Its maximum length can be determined from the median angle of the jet.

It has been shown⁽¹⁴⁾ that, for a jet produced in the maximum possible length of tunnel in the nuclear emulsion (the diameter of the silver nucleus) the mean number of evaporation particles is $N_h = 3 \pm 1.7$.

Following ROESLER and MCCUSKER, the minimum energy E_{\min} necessary to form a clean tunnel of length S nucleons without additional evaporation due to the energy transferred by friction to the nucleus is given by

$$(8) \quad E_{\min} = 16 A_{\text{eff}},$$

where A_{eff} is the atomic weight of a nuclear sphere of diameter S .

For a tunnel of length equal to S nucleon diameters, the relation between the energy of the primary, E , and the median angle of the shower, $\theta_{1/2}$, is

$$(9) \quad E = \frac{2S}{\text{tg}^2 \theta_{1/2}}.$$

Now

$$(10) \quad A_{\text{eff}} = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{S}{2} \right)^3,$$

where the density of nuclear matter is expressed in units of mass of the nucleon. So that from (8)

$$(11) \quad E \geq \frac{8}{3} \pi S^3.$$

Hence from (9) and (11),

$$(12) \quad \frac{2S}{\text{tg}^2 \theta_{1/2}} \geq \frac{8}{3} \pi S^3.$$

Thus the maximum possible length of tunnel associated with a given median

⁽¹⁴⁾ W. HEITLER: *Seminar at the University of Padua.*

angle $\theta_{1/2}$ is given by

$$(13) \quad S_{\max} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \theta_{1/2}}.$$

ROESLER and McCUSKER further define a factor of multiplicity, f_m ,

$$(14) \quad m = m_0 + f_m S,$$

where m_0 is the mass of the primary,

m is the total mass of the secondaries.

Given the uncertainty to date in the proportion of heavy to light mesons produced in these showers we have preferred to use a factor of multiplicity, f_n , in terms simply of the number of secondary particles, defined by

$$(15) \quad n = 1 + f_n S,$$

n being the total number of charged and neutral secondary particles. We have taken the generally accepted value

$$(16) \quad n_m = 1.5n_{m\pm},$$

where $n_{m\pm}$ is the number of charged mesons.

Taking into account the number, S , of nucleons which must be present among the secondaries, we obtain

$$(17) \quad f_n = \frac{1}{S} \left\{ 1.5 \left(n_{\pm} - \frac{S+1}{2} \right) + S \right\},$$

where n_{\pm} is the total number of charged secondaries observed in the shower.

The maximum possible energy of the primary of the shower can be expressed as

$$(18) \quad E_{\max} = \frac{2S_{\max}}{\operatorname{tg}^2 \theta_{1/2}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \theta_{1/2}}.$$

Results.

In Fig. 4 are plotted the values of the primary energy E in the L -system and of the multiplicity, f_n . The filled circles correspond to the minimum tunnel, $S = 1$, i.e. multiple production in a single collision. The open circles represent points calculated with the maximum length of tunnel consistent with the median angle, as defined above. The statistical errors on these points are, for the energy, the same as that given in equation (4), and for

the multiplicity factor, 1.5 times the error on the number of secondaries as given in (5).

In this diagram are plotted these jets with 4 or less evaporation tracks and with sufficient energy to have been produced in more than one collision.

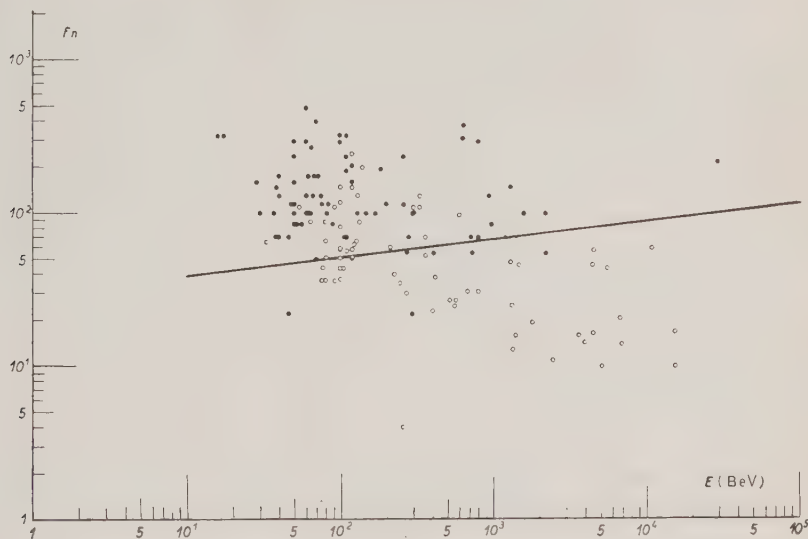


Fig. 4. - An analysis on the tunnel model of all jets with $\gamma \leq 3$. The solid points represent the estimated primary energy in the L -system and the multiplicity of the shower if it is created in a single collision. The circles represent the primary energy and mean multiplicity per collision for the same stars when they are assumed to be formed in a plural collision involving S_{\max} separate collisions. S_{\max} is the maximum number of collisions consistent with the small excitation of the nucleus and the observed median angle of the shower. S_{\max} is given by equation (13).

There are 68 of them. Sixty five jets, with a primary energy less than 36 GeV can on this model only be attributed to multiple production in a single collision. They are, however, of too low energy to allow any conclusions to be drawn as to the mode of production.

It seems that the best fitting line of separation between the points of maximum and minimum tunnel still leaves 17 points corresponding to the maximum tunnel well above the separation line. At least twice as many as the maximum possible number of collisions would in general be necessary to bring these 17 points down to the same mean multiplicity factor as the others.

Conclusions.

(1) Supposing that the jets with $0 \leq N_h \leq 2$ are examples of pure multiple production, we seem to have distinguished two groups, one of which has a consistently higher multiplicity than the other. In the higher multiplicity group, all the energy of the primary can be accounted for by the production of π -mesons. In the lower multiplicity group, only a fraction of the energy available can be accounted for in this way.

The existence of two groups might be due to one of the following mechanisms:

(a) The low multiplicity jets are produced in glancing collisions, in which only a part of the energy of the primary is given up in the collision, and the high multiplicity jets in head-on collisions.

(b) π -mesons are mainly produced in the high multiplicity jets and mainly heavy mesons in the low multiplicity group.

(c) The primaries of the two groups are of a different nature (e.g. nucleons in one group, mesons in the other).

The more confused distribution for jets with $3 \leq N_h \leq 4$ is to be expected on this hypothesis, since the more evaporation tracks there are, the more the nucleons must have come into play, and the further we retreat from pure multiple production.

(2) Leaving aside the discussion between multiple and plural production, the application of the model of the tunnel, which allows the possibility of any number of collisions from one to a maximum number compatible with the median angle of the shower, we find that 75% of our jets are not inconsistent with a single mode of production. However the remaining 25% seem to require a factor of multiplicity in the production about twice the mean.

Acknowledgements.

The authors take great pleasure in expressing their gratitude to Professors L. LEPRINCE RINGUET and G. OCCHIALINI for their guidance in this work and their comprehension in making possible the present collaboration between their laboratories.

They thank their colleagues for their ever ready help and the scanning teams who have undertaken the tedious work of examining the plates. Special thanks are due to Miss CLAREL, Mrs. MARÉCHAL and Miss LOCATELLI for their assistance in this work.

APPENDIX I

Fig. 5 shows the process occurring during a collision between two nucleons *a*) in the centre of mass system and *b*) in the laboratory system.

In both cases the meson production must be symmetrical about the line OO' of the primary, and in the centre of mass system it must be symmetrical with respect to reflection in the meridian plane AA' . The distribution is not necessarily isotropic in the centre of mass frame.

Suppose the velocity of the primary in the centre of mass system is β'_p and that of a secondary is β'_m . Suppose a certain meson is emitted at an angle θ' to the line OO' in the C -system, and at an angle θ to OO' in the laboratory. Write $m = \beta'_p/\beta'_m$.

The Lorentz transformation gives for the relation between θ and θ'

$$(19) \quad \gamma'_p \operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta'}{m + \cos \theta'}.$$

If both the primary and the secondaries are extremely relativistic in the centre of mass system, $\beta'_p = \beta'_m = 1$ then

$$(20) \quad \gamma'_p \operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta'}{1 + \cos \theta'} = \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2}.$$

It is clear that the median angle in the laboratory is the half angle of the cone corresponding to the plane AA' in the centre of mass system. From equation (20) we get

$$(21) \quad \gamma'_p \operatorname{tg} \theta_{1/2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \gamma'_p = \cot \theta_{1/2}.$$

Which is equation (1) of the text.

Suppose θ'_f is the angle in the C -system which defines a cone containing a fraction, f , of the emitted mesons of the tracks. Then by symmetry ($\pi - \theta'_f$) is the angle of the cone containing a fraction $(1 - f)$. Then in the laboratory system.

$$(22) \quad \begin{cases} \gamma'_p \operatorname{tg} \theta_f = \operatorname{tg} \frac{\theta'_f}{2} \\ \gamma'_p \operatorname{tg} \theta_{1-f} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta'_f}{2} \right) = \cot \frac{\theta'_f}{2} \\ \therefore \gamma'^2 \operatorname{tg} \theta_f \operatorname{tg} \theta_{1-f} = 1, \end{cases}$$

which is equation (2) of the text.

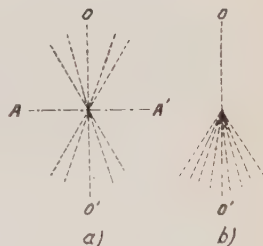


Fig. 5. - The production of mesons in a nucleon-nucleon collision. The angular distribution as seen (a) in the C -system and (b) in the L -system.

To proceed further we must make some assumption about the angular distribution in the centre of mass system. A convenient assumption is that the fraction of the mesons emitted in an interval $d\theta'$ at an angle θ' is given by

$$(23) \quad P(\theta') d\theta' = \begin{cases} = a |\cos \theta'|^b \sin \theta' d\theta' & \text{for } \theta' < \theta'_{\max} \text{ and } \theta' > \pi - \theta'_{\max} \\ = 0 & \text{for } \theta'_{\max} < \theta' < \pi - \theta'_{\max} \end{cases}$$

An isotropic distribution corresponds to $b = 0$ and $\theta'_{\max} = \pi/2$. The case $b = 0$ and $\theta'_{\max} < \pi/2$ corresponds to a distribution which is isotropic within the forward and backward cones defined by θ'_{\max} , and zero elsewhere.

The normalization constant, a , can easily be found to be

$$(24) \quad a = \frac{b+1}{2(1 - \cos^{b+1} \theta'_{\max})}.$$

Using the transformation equation (20) we can find

$$(25) \quad \begin{cases} \sin \theta' = \frac{2\gamma' \operatorname{tg} \theta}{1 + \gamma'^2 \operatorname{tg}^2 \theta}, \\ \cos \theta' = \frac{1 - \gamma'^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \gamma'^2 \operatorname{tg}^2 \theta}, \\ d\theta' = \frac{2\gamma' \sec^2 \theta}{1 + \gamma'^2 \operatorname{tg}^2 \theta} d\theta. \end{cases}$$

These values, substituted in equation (23) give the angular distribution in the L -system $P(\theta) d\theta$.

We now proceed to estimate the best value of γ' by the method of maximum likelihood.

We suppose that the angles of emission of the mesons are independent. This is a physical assumption which has no foundation in experiment. However, we can say that the conservation of momentum applies no restraint to the possible distribution in view of the large relative number of neutral particles involved.

The probability of the observed set of observations $\theta_1 \dots \theta_n$ is then given by

$$P(\theta_1 \dots \theta_n) d\theta_1 \dots d\theta_n = \prod_{i=1}^n P(\theta_i) d\theta_i.$$

We chose the value of γ' which makes this probability maximum, i.e. we set

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma'} P(\theta_1 \dots \theta_n) \right\}_{\theta_i \text{ const.}} = 0,$$

i. e.

$$\sum \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma'} \log P(\theta_i) \right\}_{\theta_i = \text{const.}} = 0.$$

Using equation (23) and equations (25) we obtain after some algebra

$$(26) \quad \frac{N}{2\gamma'^2} = \sum \frac{1}{\cot^2 \theta_i + \gamma^2} - \frac{b}{2} \sum \left(\frac{1}{1 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \theta_i} - \frac{1}{1 - \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \theta_i} \right).$$

The solution of equation (26) for γ' is the maximum likelihood estimate of γ' .

In the case $b = 0$, the maximum likelihood estimate becomes the solution of the equation

$$(27) \quad \frac{N}{2\gamma'^2} = \sum \frac{1}{\cot^2 \theta_i + \gamma^2}.$$

If $b \neq 0$ equation (27) remains a valid estimate which is close to the maximum likelihood estimate, the second summation in equation (26) being zero on the average. In any case HOANG⁽¹²⁾ has shown that b is small for most stars of primary energy less than 1000 GeV in the L -system.

APPENDIX II

Error due to the failure of the condition $\beta'_m/\beta'_p = 1$.

If $m = \beta'_n/\beta'_m \neq 1$ the equation of transformation become more complicated, since we now have to use equation (19) of Appendix I instead of equation (20).

In this case the median angle is given by

$$(28) \quad \gamma' \operatorname{tg} \theta_{1/2} = \frac{\sin \pi/2}{m + \cos \pi/2} = \frac{1}{m}.$$

In the small angle approximation

$$(29) \quad \gamma' = \frac{1}{m\theta_{1/2}}.$$

If $\beta'_m > \beta'_p$ this is exact. However, if $\beta'_m < \beta'_p$ which is usually the case there is a further complication. The angle $\theta_{1/2}$ contains not only that half of the tracks emitted in the forward direction in the C -system, but also those emitted in the backward direction within an angle which is the second solution of

$$\frac{1}{m} = \frac{\sin \theta'}{m + \cos \theta'} \quad \text{or} \quad \cos \theta' = -\frac{2m}{1 + m^2}.$$

The solid angle in this cone is

$$2\pi \left(1 - \frac{2m}{1 + m^2} \right) = \frac{2\pi(1 - m)^2}{1 + m^2}.$$

We consider only the case of an isotropic distribution. In this case the fraction of all the tracks which emerge on the wrong side of $\theta_{1,2}$ is

$$\frac{(1-m)^2}{2(1+m^2)}.$$

If we write $m = (1 + \varepsilon)$ this number is approximately

$$\varepsilon^2/4.$$

The value of m can be estimated from the outer limit of the cone of shower particles. This can be assumed to be the maximum value of θ given by differentiating equation (20) and equation to zero. We find for θ'_{lim} the result

$$\cos \theta'_{\text{lim}} = -\frac{1}{m},$$

and hence

$$(30) \quad \gamma' \operatorname{tg} \theta_{\text{lim}} = \frac{1}{\sqrt{m^2 - 1}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

The values $\varepsilon = 1/2\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \theta_{\text{lim}}$ obtained for ε are usually not greater than 0.2. In this case the number of tracks occurring on the wrong side of the median angle is 0.01 or one in a hundred, which is a much smaller error than that involved in the actual displacement of $\theta_{1/2}$.

RIASSUNTO (*)

È stato fatto uno studio sulla variazione della molteplicità dei « jets » con l'energia del primario dedotta dalla distribuzione angolare dei secondari. L'analisi è stata fatta sia nell'ipotesi della produzione multipla pura, sia seguendo il modello di ROESLER e MCCUSKER della produzione in un « tunnel » attraverso il nucleo.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Sull'applicabilità del concetto di percorso per l'assorbimento dei muoni sotto terra.

M. MANDÒ e P. G. SONA

Istituto di Fisica dell'Università - Firenze ()*

(ricevuto il 3 Luglio 1953)

Riassunto. — Risolvendo la corrispondente equazione di diffusione in una prima approssimazione, si trova come il metodo del percorso generalmente usato per passare dalla curva intensità-profondità dei muoni sotto terra allo spettro di energia al livello del mare, sebbene a priori non sia giustificato, risulti tuttavia sufficiente fino a profondità di circa 1000 hg/cm^2 a causa della particolare forma dello spettro che non si discosta molto da uno spettro di potenze con esponente -3 . A profondità maggiori e fino a circa 2000 hg/cm^2 si ritiene che il metodo del percorso possa ancora essere usato, applicando ai risultati corrispondenti le piccole correzioni della tabella IV; una decisione sicura su questo punto richiede tuttavia la soluzione esatta, o almeno di seconda approssimazione, dell'equazione di diffusione.

1. — Introduzione.

Una delle fonti d'informazione indiretta sugli eventi di alta energia nei raggi cosmici è costituita da misure sotto forti spessori di roccia; nell'interpretazione di tali risultati occorre spesso risalire dall'intensità osservata alle varie profondità allo spettro di energia dei muoni al livello del mare o calcolare lo spettro di energia ad una data profondità, dato un certo spettro di energia teorico al livello del mare.

(*) Questo lavoro fa parte del programma di ricerche dell'I.N.F.N. - Sezione di Roma.

Tale problema è stato affrontato finora (cfr., per esempio, GEORGE ⁽¹⁾, BARRETT, BOLLINGER, COCCONI, EISENBERG, GREISEN ⁽²⁾, MANDÒ e RONCHI ⁽³⁾) associando all'energia di un muone al livello del mare un corrispondente percorso valutato sulla base della perdita di energia *media* dovuta alle varie cause (collisione, radiazione, creazione di coppie, eventi a carattere nucleare, ecc.).

Tuttavia è ben noto che il metodo del percorso rappresenta una buona approssimazione solo quando è piccolo il contributo alla perdita totale di energia di quei fenomeni in cui una frazione notevole dell'energia della particella si perde in un singolo urto.

Nel caso specifico dei muoni di grande energia, tale ipotesi è tanto più in difetto quanto più è grande il contributo delle perdite per radiazione (di quelle nucleari si sa troppo poco per poter dire qualcosa di sicuro, ma è probabile che considerazioni analoghe valgano anche per esse), cioè quanto più grande è l'energia stessa, sì che, in tale caso, il metodo del percorso non è «a priori» giustificato.

Una giustificazione potrebbe darsi solo calcolando il numero medio di particelle che giunge ad una determinata profondità mediante la corrispondente equazione di diffusione.

Una soluzione esatta e completa di tale equazione, quando si voglia tener conto dell'esatta dipendenza dall'energia delle perdite per collisione e della sezione d'urto per radiazione, presenta difficoltà notevoli di calcolo e non ci risulta sia stata finora data esplicitamente.

Riteniamo perciò utile esporre qui i risultati di alcuni calcoli approssimati ed alcune considerazioni relative a casi particolari più semplici, dai quali, a nostro avviso, è possibile trarre anche delle plausibili conclusioni di carattere generale.

2. - Soluzioni di prima approssimazione in generale.

Dato che le perdite per collisione variano molto lentamente coll'energia (specie nel campo delle alte energie che maggiormente ci interessano), appare molto naturale introdurre una prima semplificazione nell'equazione di diffusione, considerando tali perdite costanti. Naturalmente non si può pretendere di ottenere risultati quantitativi calcolando, sia il percorso, sia la soluzione dell'equazione di diffusione, con tale ipotesi restrittiva; è tuttavia ragionevole

(¹) E. P. GEORGE: in *Progress in Cosmic Ray Physics* edited by J. G. WILSON (Amsterdam, 1952) p. 414.

(²) P. H. BARRETT, L. M. BOLLINGER, G. COCCONI, Y. EISENBERG e K. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **24**, 133 (1952).

(³) M. MANDÒ e L. RONCHI jr.: *Nuovo Cimento*, **9**, 517 (1952).

supporre che, quando il metodo del percorso costituisca già una buona prima approssimazione, si possano ottenere risultati migliori, e praticamente sufficienti, applicando ai risultati forniti dal metodo del percorso (e con l'esatta dipendenza delle perdite dall'energia) le correzioni che si ottengono, invece, dal confronto dei due metodi, ambedue sviluppati con l'ipotesi restrittiva delle perdite per collisione costanti.

Un'ulteriore semplificazione è suggerita dal fatto che, nel caso che a noi interessa (muoni di alta energia sotto terra) il principale contributo alle perdite di energia resta pur sempre dato dalle perdite per collisione (cfr., ad esempio, l. c. ⁽³⁾), sì che appare naturale cercare una soluzione approssimata in cui le altre perdite si considerino piccole del primo ordine.

Prima di procedere con gli sviluppi analitici precisiamo le principali notazioni che useremo nel seguito:

$1/C = - (dE/dx)_{\text{coll}}$,	valore costante delle perdite di energia per collisione;
x ,	profondità in hg/cm ² ;
E ,	energia di una particella generica;
$y = x/C$,	energia che dovrebbe avere una particella per giungere alla profondità x , se vi fossero le sole perdite per collisione;
$p(E, \varepsilon) d\varepsilon$,	probabilità per unità di percorso che una particella di energia E perda per radiazione un'energia tra ε e $\varepsilon + d\varepsilon$;
$G(y, E)$,	numero di particelle con energia maggiore di E alla profondità $x = Cy$;
$g(y, E) = - \partial G / \partial E$,	corrispondente spettro differenziale di energia;
$S(E)$,	spettro integrale di energia iniziale (per $x = 0$);
$s(E) = - S'(E)$,	corrispondente spettro differenziale;
$N_a(x) = G(y, 0)$,	numero totale di particelle alla profondità $x = Cy$;
$\bar{N}_a(x)$,	idem in prima approssimazione (v. oltre);
$N_x(x)$,	numero totale di particelle alla profondità x calcolato col metodo del percorso;
$\bar{N}_x(x)$,	idem in prima approssimazione;
$N_0(x) = S(y)$,	numero di particelle che si avrebbero alla profondità $x = Cy$ se vi fossero le sole perdite per collisione, considerate indipendenti dall'energia.

Ai fini della ricerca di soluzioni approssimate (nel senso poco sopra specificato) conviene scrivere l'equazione di diffusione nella forma:

$$(1) \quad \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial E} = - C \int_E^{\infty} g(y, E') dE' \int_{E'-E}^{E'} p(E', \varepsilon) d\varepsilon ;$$

considereremo allora come approssimazione zero la soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial E} = 0,$$

cioè, tenendo conto delle condizioni iniziali,

$$(2) \quad G(y, E) = S(E + y),$$

ovvero

$$(2') \quad g(y, E) = s(E + y).$$

Ai fini di una soluzione di prima approssimazione nel secondo membro della (1) potremo ora sostituire alla $g(y, E')$ l'espressione (2'); con ciò si ottiene per G un'equazione differenziale la cui soluzione, con le condizioni iniziali date, si può scrivere nella forma

$$(3) \quad G(y, E) = S(E + y)[1 + CA(y, E)],$$

dove $A(y, E)$ è dato da

$$(4) \quad A(y, E) = - \frac{1}{S(E + y)} \int_{E+y}^{\infty} s(E'') dE'' \int_{E''-y}^{E''} dE' \int_{E''-E-y}^{E'} p(E', \varepsilon) d\varepsilon.$$

In particolare, per $E = 0$, si ha

$$(5) \quad A(y, 0) = - \frac{1}{S(y)} \int_y^{\infty} s(E'') dE'' \int_{E''-y}^{E''} dE' \int_{E''-y}^{E'} p(E', \varepsilon) d\varepsilon. \quad (4)$$

Sebbene col metodo del percorso non vi sia alcuna difficoltà a valutare numericamente e rigorosamente il numero di particelle ad una data profon-

(4) Volendo spingere l'approssimazione fino ai termini del secondo ordine in C , si può procedere cercando una soluzione approssimata della forma

$$G(y, E) = S(E + y)[1 + CA(y, E) + C^2B(y, E)];$$

si trova allora per A (ovviamente) l'espressione precedente (4), ed inoltre

$$B(y, E) = \frac{1}{S(E + y)} \int_0^y du \int_{E+y-u}^{\infty} \frac{\partial}{\partial E'} [S(E' + u)A(u, E')] dE' \int_{E'-(E+y-u)}^{E'} p(E', \varepsilon) d\varepsilon.$$

dità, per il confronto coi risultati dell'equazione di diffusione ci sarà tuttavia utile sviluppare analiticamente i calcoli relativi al metodo del percorso nella stessa prima approssimazione (in C).

In generale si ha

$$(6) \quad N_p(x) = \int_{E(y)}^{\infty} s(E) dE,$$

dove \bar{E} è legato ad y dalla relazione

$$(7) \quad y(\bar{E}) = \int_0^{\bar{E}} \frac{dE}{1 + C \int_0^E \varepsilon p(E, \varepsilon) d\varepsilon}.$$

Eseguito i calcoli in prima approssimazione si trova:

$$y(\bar{E}) = \bar{E} - C\psi(\bar{E}) \quad \text{con} \quad \psi(\bar{E}) = \int_0^{\bar{E}} dE \int_0^E \varepsilon p(E, \varepsilon) d\varepsilon;$$

tale relazione si può invertire, nella stessa approssimazione, con $\bar{E}(y) = y + C\psi(y)$. Sostituendo infine nella (6) si ottiene:

$$(8) \quad \bar{N}_p(x) = S(y) - C\psi(y)s(y) = S(y) \left\{ 1 - C \frac{s(y)}{S(y)} \int_0^y dE \int_0^E \varepsilon p(E, \varepsilon) d\varepsilon \right\}.$$

3. - Confronto tra il metodo del percorso e l'equazione di diffusione.

Effettueremo ora il confronto tra il metodo del percorso e quello dell'equazione di diffusione in alcuni casi particolari, e cioè:

A) Soluzioni di prima approssimazione; spettro iniziale di potenze $s(E) dE = S_0 E^{-n} dE$; $E \cdot p(E, \varepsilon) = \varphi(\varepsilon/E)$.

B) Soluzioni di prima approssimazione; spettro iniziale di potenze $s(E) dE = S_0 E^{-n} dE$; espressione di $p(E, \varepsilon)$ corrispondente al caso dei muoni in roccia.

C) Soluzioni rigorose per il caso limite in cui, oltre alle perdite per collisione, vi sia un assorbimento di tipo catastrofico, tale cioè che l'energia della particella scompare in un solo urto.

Nelle soluzioni di prima approssimazione, dato che in approssimazione zero i due metodi necessariamente coincidono, converrà mettere in evidenza i termini di primo ordine in C ; porremo quindi

$$(9) \quad N_d(x) = S(y)(1 - C\alpha_d)$$

e

$$(10) \quad \overline{N}_p(x) = S(y)(1 - C\alpha_p),$$

e confronteremo tra loro α_d e α_p , le cui espressioni sono, ovviamente,

$$(11) \quad \alpha_d = -A(y, 0)$$

e

$$(12) \quad \alpha_p = \psi(y)s(y)/S(y).$$

Caso A). — In questo caso, posto $\varepsilon/E = v$, è $p(E, \varepsilon) d\varepsilon = \varphi(v) dv$. Con il metodo del percorso si ottiene immediatamente:

$$(13) \quad \alpha_p = \binom{n-1}{y} \int_0^y dE \int_0^1 v E \varphi(v) dv = \frac{n-1}{2} y \int_0^1 v \varphi(v) dv.$$

Con il metodo dell'equazione di diffusione, eseguendo in α_d i cambiamenti di variabile $E'' = y/(1-t)$, $\varepsilon/E' = v$ ($dE'' = y dt/(1-t)^2$ e $d\varepsilon = E' dv$) si ottiene

$$\alpha_d = (n-1) \int_0^1 (1-t)^{n-3} dt \int_{yt/(1-t)}^{y/(1-t)} dE' \int_{yt/(1-t)E'}^1 \varphi(v) dv.$$

Ponendo poi $E' = yw/(1-t)$, $dE' = y dw/(1-t)$, si ha ancora:

$$\alpha_d = (n-1) y \int_0^1 (1-t)^{n-3} dt \int_t^1 dw \int_{t/w}^1 \varphi(v) dv.$$

e cambiando opportunamente l'ordine delle integrazioni si trova infine:

$$(14) \quad \alpha_d = (n-1) y \int_0^1 \varphi(v) dv \int_0^1 dw \int_0^{wv} (1-t)^{n-3} dt.$$

Si verifica ora facilmente che, per $n = 3$, α_p coincide con α_d , mentre, per $n \neq 3$, in generale avremo $\alpha_p \neq \alpha_d$.

Risulta dunque che, se $p(E, \varepsilon) d\varepsilon = \varphi(v) dv$, il metodo del percorso e quello dell'equazione di diffusione si equivalgono in prima approssimazione, quando lo spettro differenziale di energia delle particelle incidenti è uno spettro di potenze con esponente -3 .

Caso B). — Dato che nel caso dei muoni la $p(E, \varepsilon) \cdot E$, pur non essendo funzione solo di v , è tuttavia funzione lentamente variabile di E (a parità di v) si può presumere che anche in questo caso i metodi del percorso e dell'equazione di diffusione diano risultati praticamente equivalenti, in prima approssimazione, quando è $n = 3$.

Abbiamo perciò svolto il calcolo con la esatta forma della $p(E, \varepsilon)$ e per i valori 2,5; 3,0; 3,5 di n , in modo da poter avere un'indicazione anche per le differenze che si trovano quando sia $n \neq 3$.

L'espressione della $p(E, \varepsilon) d\varepsilon$ è in questo caso (cfr., ad esempio, l. c. ⁽³⁾)

$$p(E, \varepsilon) d\varepsilon = K \left(\frac{3}{4} v + \frac{1}{v} - 1 \right) [\ln(1 - v) - \ln v + \ln(E/\mu c^2) + H] dv = \Phi(E, v) dv,$$

dove $v = \varepsilon/E$, $K = (16/3)\alpha N r_0^2 (Z^2/A)(m/\mu)^2$, $H = \ln(12/5 Z^{1/3}) - 1/2$.

La formula che dà α_i (cfr. (11) e (5)) si può mettere convenientemente sotto la forma

$$(15) \quad \alpha_i = \frac{1}{S(y)} \int_y^\infty s(E'') J(y, E'') dE'',$$

dove

$$(16) \quad J(y, E'') = \int_{E''-y}^{E''} dE' \int_{E''-y}^{E'} p(E', \varepsilon) d\varepsilon = \int_{(E''-y)/E''}^1 dv \int_{(E''-y)/v}^{E''} \Phi(E', v) dE'$$

rappresenta ovviamente la stessa α_i nel caso di uno spettro iniziale mono-energetico.

Eseguito il calcolo, piuttosto laborioso, dei due integrali nella (16) e ponendo $t = (E'' - y)/E''$ si ottiene

$$(17) \quad J(y, E'') = K E'' \left[z_1(t) - z_2(t) \ln \frac{E''}{\mu c^2} \right],$$

con

$$(17') \quad \begin{aligned} z_1(t) = & (2 - H) \ln t - \left(H + \frac{3}{4} \right) t \ln t - \frac{3}{8} t^2 \ln t + \frac{1}{2} \ln^2 t + \\ & + \frac{3}{8} (H + 1) t^2 + \left(-\frac{\pi^2}{6} + \frac{5}{4} H - \frac{29}{8} \right) t - \frac{\pi^2}{6} + \\ & + \frac{13}{4} - \frac{13}{8} H - (1 + t) R(-t) - \frac{1}{8} (13 + 3t)(1 - t) \ln(1 - t); \end{aligned}$$

$$(17'') \quad z_2(t) = (1+t) \ln t + \frac{1}{8} (1-t)(13+3t),$$

E

$$(17''') \quad R(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+v)}{v} dv.$$

Nel caso di uno spettro di potenze ($s(E'') dE'' = S_0 E''^{-n} dE''$) e prendendo come variabile di integrazione t , si può scrivere α_d nella forma

$$(18) \quad \alpha_d = K(n-1) y \left(A_1 - A_2 \ln \frac{y}{\mu c^2} \right),$$

dove

$$(18') \quad A_1 = \int_0^1 (1-t)^{n-3} [z_1(t) + z_2(t) \ln(1-t)] dt,$$

$$(18'') \quad A_2 = \int_0^1 (1-t)^{n-3} z_2(t) dt.$$

La maniera più comoda di presentare i risultati finali è quella di tabulare non già $\bar{N}_d(x)$ ma il rapporto $\bar{N}_d(x)/N_0(x)$. Per tale rapporto si ricava una espressione della forma

$$(19) \quad \frac{\bar{N}_d(x)}{N_0(x)} = 1 + B_1 x - B_2 x \ln \frac{x}{C \mu c^2}.$$

La tabella I dà i valori numerici delle costanti A_1 e A_2 , B_1 e B_2 , calcolati con gli stessi valori delle costanti fondamentali usati in l. c. ⁽³⁾ (compresi

TABELLA I. — Valori numerici delle costanti nelle formule (18), (19) e (20).

	$n = 2,5$	$n = 3$	$n = 3,5$
A_1	— 0,2806	— 0,2205	— 0,1770
A_2	— 0,4179	— 0,3750	— 0,3422
$10^5 B_1$	1,0675 cm ² /hg	1,1186 cm ² /hg	1,1219 cm ² /hg
$10^5 B_2$	1,5897 »	1,9020 »	2,1693 »
$10^5 D_1$	1,1215 cm ² /hg	1,4953 cm ² /hg	1,8691 cm ² /hg
$10^5 D_2$	1,4246 »	1,9020 »	2,3775 »

$A = 24$ e $Z = 12$) e prendendo per C il valore arrotondato $C = 4 \text{ hg/cm}^2 \cdot \text{GeV}$.

Infine i valori di $\bar{N}_d(x)/N_0(x)$ sono riportati, per diversi valori di x , nella tabella II.

TABELLA II.

x hg/cm ²	$\bar{N}_d(x)/N_0(x)$		
	$n = 2,5$	$n = 3,0$	$n = 3,5$
200	0,9826	0,9789	0,9756
400	0,9608	0,9525	0,9452
800	0,9128	0,8944	0,8783
1 200	0,8614	0,8323	0,8069
1 600	0,8079	0,7676	0,7325
2 000	0,7528	0,7011	0,6560

Per quanto riguarda il metodo del percorso, l'integrale $\int_0^E \varepsilon p(E, \varepsilon) d\varepsilon$ che figura nella (12) è calcolato in l. c. ⁽³⁾ (formula (8)); integrando ulteriormente rispetto ad E si ottiene:

$$(20) \quad \frac{\bar{N}_p(x)}{N_0(x)} = 1 + D_1 x - D_2 x \ln \frac{x}{\mu c^2},$$

in cui le costanti D_1 e D_2 hanno i valori numerici specificati nella tabella I. I corrispondenti valori di $\bar{N}_p(x)/N_0(x)$ per diversi valori di x sono riportati nella tabella III.

TABELLA III.

x hg/cm ²	$N_p(x)/N_0(x)$		
	$n = 2,5$	$n = 3,0$	$n = 3,5$
200	0,9847	0,9796	0,9745
400	0,9655	0,9540	0,9425
800	0,9230	0,8974	0,8717
1 200	0,8776	0,8368	0,7960
1 600	0,8302	0,7737	0,7171
2 000	0,7814	0,7086	0,6357

Le correzioni percentuali da applicare alle intensità ottenute col metodo del percorso, in questa approssimazione, per ottenere le intensità fornite dal

metodo dell'equazione di diffusione sono raccolte nella tabella IV. Da tali dati appare come, anche in questo caso, per $n = 3$ gli scarti, pur non essendo zero, siano praticamente trascurabili anche alle profondità maggiori.

TABELLA IV. *Correzioni percentuali da apportare alle intensità calcolate col metodo del percorso per ottenere quelle che risultano dall'equazione di diffusione (prima approssimazione).*

x hg/cm ²	correzioni in %		
	$n = 2,5$	$n = 3,0$	$n = 3,5$
800	- 1,11	- 0,33	+ 0,76
1 200	- 1,85	- 0,54	+ 1,37
1 600	- 2,69	- 0,79	+ 2,15
2 000	- 3,66	- 1,06	+ 3,19

Caso C). - Questo caso potrebbe considerarsi come un caso limite del caso A), ma è suscettibile anche di soluzione esatta, in maniera più semplice e diretta, ed è stato anzi scelto appunto per questo; esso ci sarà utile per una stima di massima degli errori che si possono commettere arrestando il calcolo ai termini del primo ordine.

Se p_0 è la probabilità di un urto catastrofico per unità di percorso, si trova facilmente che, con le stesse notazioni usate precedentemente, la soluzione rigorosa è

$$G(y, E) = S(y + E) \exp[-Cp_0y],$$

e, per $E = 0$,

$$N_d(x) = G(y, 0) = S(y) \exp[-Cp_0y];$$

risulta quindi

$$(21) \quad \frac{N_d(x)}{N_0(x)} = \exp[-Cp_0y] = 1 - p_0x + (p_0x)^2/2 - \dots;$$

tale rapporto è, come è ben noto, indipendente dalla forma dello spettro e, in particolare, da n .

D'altra parte il legame percorso energia è dato in questo caso da

$$(22) \quad E(y) = (\exp[Cp_0y] - 1)/Cp_0,$$

onde il rapporto $N_p(x)/N_0(x)$ risulta, per il solito spettro di potenze,

$$(23) \quad \frac{N_p(x)}{N_0(x)} = [p_0x/(\exp[p_0x] - 1)]^{n-1} = \left[1 - \frac{1}{2}p_0x + \frac{1}{12}(p_0x)^2 - \dots\right]^{n-1}.$$

Tenendo conto nella (23) dei termini fino al secondo ordine si ha:

$$(24) \quad \frac{N_p(x)}{N_0(x)} = 1 - \frac{3}{4} p_0 x + \frac{7}{32} (p_0 x)^2 \quad \text{per } n = 2,5,$$

$$(25) \quad \frac{N_p(x)}{N_0(x)} = 1 - p_0 x + \frac{5}{12} (p_0 x)^2 \quad \text{per } n = 3,0,$$

$$(26) \quad \frac{N_p(x)}{N_0(x)} = 1 - \frac{5}{4} p_0 x + \frac{65}{96} (p_0 x)^2 \quad \text{per } n = 3,5.$$

Confrontando (25) con (21) si vede che, anche in questo caso, per $n = 3$, i due metodi coincidono fino ai termini di primo ordine.

In questo caso si può anche spingere il confronto fino ai termini del secondo ordine; si constata allora che, anche tenendo conto di tali termini, il caso $n = 3$ fornisce scarti piuttosto piccoli $[(1/12)p_0^2 x^2]$ ma che, anche per i valori alquanto più sfavorevoli $n = 2,5$ e $n = 3,5$, i termini del secondo ordine hanno lo stesso segno per il metodo del percorso e per la soluzione rigorosa, mentre i coefficienti si mantengono abbastanza piccoli, sì che, in questo caso, si può dire che le conclusioni tratte dall'esame dei termini di primo ordine continuano a valere anche quando i termini del secondo cominciano a diventare sensibili. Tale incoraggiante conclusione non è ovviamente estendibile agli altri casi, ma induce tuttavia a ritenere che almeno le conclusioni qualitative tratte dall'esame dei termini del primo ordine possano mantenere la loro validità anche alle profondità maggiori, per le quali, a rigore, occorre tener conto anche dei termini del secondo ordine.

4. — Considerazioni conclusive.

Il risultato generale più interessante di quanto precede è la posizione privilegiata del valore -3 per l'esponente nello spettro di energia, riguardo alla equivalenza tra metodo del percorso e metodo dell'equazione di diffusione, anche se, a rigore, tale equivalenza è stata dimostrata solo in prima approssimazione e per una $p(E, \epsilon) d\epsilon = q(v) dv$, mentre per una $\Phi(E, v) dv$ lentamente variabile con E (a parità di v), quale si ha nel caso delle perdite per radiazione dei muoni in roccia, si hanno delle piccole differenze anche nei termini del primo ordine e per $n = 3$.

Prima di procedere ulteriormente nella discussione di quest'ultimo caso che ha fornito lo spunto per i calcoli sovraesposti, sarà opportuno vedere quali dati si hanno per decidere sul valore più plausibile di n .

Fino a ~ 50 GeV si hanno i dati sperimentali di CARO, PARRY, RATHGEBER⁽⁵⁾ che indicano per le maggiori energie uno spettro di potenze con

⁽⁵⁾ D. E. CARO, J. K. PARRY e H. D. RATHGEBER: *Nature*, **165**, 689 (1950).

$n = 3,0 \pm 0,2$. Ad energie ancora maggiori non si hanno dati sperimentali diretti; tuttavia è abbastanza plausibile ammettere che lo spettro dei π^\pm carichi, che danno luogo a μ^\pm , non differisca sensibilmente da quello dei π^0 neutri, per cui si hanno indicazioni indirette fornite dai grandi sciame; l'esponente dello spettro differenziale sarebbe in tal caso 2,8 ⁽⁶⁾; ma, dato che i π^0 hanno vita media molto breve, essi hanno una probabilità trascurabile (anche alle alte energie per cui la vita media risulta relativisticamente allungata) di essere catturati prima di dare i γ da cui ha origine lo sciame, mentre per i π^\pm tale probabilità può diventare cospicua alle alte energie, col risultato di impoverire lo spettro dei muoni alle energie più alte, cioè in definitiva di aumentare il valore di n ; come è ben noto, fin dalla prima teoria del fenomeno proposta da GREISEN ⁽⁷⁾ e da HAYAKAWA e TOMONAGA ⁽⁸⁾, il risultato è che alle energie molto alte lo spettro dei muoni finisce per avere un valore dell'esponente uguale a $-(n+1)$, se $-n$ era il valore dell'esponente alle basse energie (pari a quello delle particelle generanti); pertanto, se tutti i muoni di alta energia al livello del mare provenissero da π^\pm , e se per questi si accetta un valore di $n \cong 2,8$, si potrebbe attendersi per i muoni al livello del mare un valore di n lentamente crescente da 2,8 a 3,8 al crescere dell'energia. Non si sa ancora nulla di sicuro sul contributo delle particelle K allo spettro dei muoni di alta energia al livello del mare, ma se, come è probabile, tale contributo è sensibile (cfr. l. c. ⁽²⁾), dato che la vita media dei mesoni K è minore, ammettendo anche per essi uno spettro analogo a quello dei π , c'è da attendersi che il valore limite $n = 3,8$ non venga raggiunto alle profondità usuali ($x < 2000$ hg/cm²). In definitiva riteniamo che un valore di n lentamente variabile fra 3 (valore sperimentale a ~ 50 GeV) e 3,5 (alle più alte energie) rappresenti lo spettro più plausibile per i muoni al livello del mare nel campo di energia da 100 a 500 GeV.

Ciò premesso, dai risultati dei nostri calcoli si può concludere che, a rigore, il metodo del percorso non è applicabile se non quando sia $n = 3$, in quanto già i termini di primo ordine sono diversi da quelli forniti dall'equazione di diffusione; anche tale conclusione è solo approssimata nel caso B). Dal punto di vista pratico tuttavia si può dire che nei limiti di applicabilità (che si possono valutare grosso modo a $x < 1000$ hg/cm²) dell'approssimazione del primo ordine, le differenze sono appena significative; ad esempio, a 1200 hg/cm² risulta dalla tabella IV che lo scarto percentuale tra metodo del percorso ed equazione di diffusione è, nel caso B), 0,54% per $n = 3$ e 1,37% per $n = 3,5$, mentre già a tale profondità l'errore che si commette arrestandosi ai termini

⁽⁶⁾ Cfr., ad esempio, W. HEISENBERG: *Kosmische Strahlung* (Berlin, 1953), p. 445.

⁽⁷⁾ K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **73**, 521 (1948).

⁽⁸⁾ S. HAYAKAWA: *Progr. Theor. Phys.*, **3**, 199 (1948); S. HAYAKAWA e S. TOMONAGA: *Progr. Theor. Phys.*, **4**, 287 (1949).

del primo ordine, per quanto riguarda il solo metodo del percorso (per cui il calcolo numerico esatto è facile) è rispettivamente 1,17% e 2,01%. Poiché già la precisione sperimentale del 2% è faticosamente raggiungibile a tali profondità possiamo quindi concludere che il metodo del percorso è sicuramente applicabile fino a profondità di circa 1000 hg/cm²; che ciò sia possibile è dovuto alla fortunata circostanza che lo spettro differenziale di energia dei muoni al livello del mare non differisce plausibilmente molto da uno spettro di potenze con esponente — 3.

A profondità maggiori, sebbene una conclusione definitiva non possa aversi che da una soluzione rigorosa dell'equazione di diffusione o almeno dai laboriosi calcoli di seconda approssimazione, riteniamo, dall'esame dei nostri risultati di prima approssimazione nel caso *B*), e confortati da quanto accade per i termini del secondo ordine nel caso *C*), che sia più opportuno far ricorso all'equazione di diffusione, ma che praticamente (in vista anche degli errori sperimentali che crescono con la profondità) sia sufficiente applicare ai risultati ottenuti col metodo del percorso (sviluppato esattamente) le correzioni da noi valutate per i soli termini del primo ordine (tabella IV).

Il ricorso all'equazione di diffusione risulterebbe poi necessario alle maggiori profondità, qualora la controversa questione dell'entità delle perdite di tipo nucleare (cfr. l. c. ⁽³⁾, § 5) si risolvesse nel senso di un ulteriore, notevole contributo di perdite, con distribuzione analoga a quella delle perdite per radiazione.

SUMMARY

The method of the range is not « a priori » justified to convert the intensity-depth relation of cosmic rays underground into the sea level spectrum of high energy muons and viceversa, when radiation losses are to be taken into account. The pertinent diffusion equation (1) is therefore solved in a first approximation, namely by assuming that radiation losses are a small part of the collision losses, which are assumed energy-independent. It is concluded that, for a general initial energy spectrum, the range method is not correct even to first order terms only; nevertheless, in the practical case, the method comes out to be sufficiently accurate down to great depths, owing to the peculiar form of the spectrum, which happens to approach a power spectrum with the (right) exponent — 3. It is believed, however, that at greater depths the first order corrections collected in Table IV should be applied for more accurate results; but final conclusions on this point could only be reached by solving the diffusion equation exactly or at least up to second order terms.

Sulla anelasticità degli urti nucleone-nucleo a grande energia.

P. BUDINI e G. POIANI

Istituto di Fisica dell'Università - Trieste

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova

(ricevuto il 8 Luglio 1953)

Riassunto. — Si propone un metodo per la determinazione del fattore di anelasticità dell'urto nucleone-nucleo per la produzione di mesoni π , e lo si applica ai risultati di alcuni lavori sperimentali.

1. — Introduzione.

Diverse teorie sono state enunciate in questi ultimi anni sulla produzione dei mesoni alle altissime energie ⁽¹⁾. Per quanto alcune esperienze abbiano dato degli indizi importanti in favore di alcune di esse, non si può ancora dire che sia stato trovato l'esperimento decisivo che permetta una discussione critica riguardante anche i dettagli delle varie previsioni teoriche. Uno dei parametri che gioca un ruolo decisivo nelle varie impostazioni teoriche è il fattore di anelasticità dell'urto nucleone-nucleone, cioè la frazione dell'energia cinetica del nucleone urtante spesa nella creazione dei mesoni ^(*). Questo fattore, che evidentemente determina la molteplicità dei mesoni creati, e che, secondo le più recenti vedute teoriche ⁽¹⁾, dovrebbe esser soggetto a grandi fluttuazioni, determinanti a loro volta le note fluttuazioni nella molteplicità, è sperimentalmente molto poco noto, e forse anche molto difficile da esser direttamente misurato con gli attuali mezzi sperimentali.

Nel presente lavoro ci proponiamo di esporre e discutere un metodo di determinazione sperimentale del valor medio di questo parametro per l'urto

⁽¹⁾ W. HEISENBERG: *Kosmische Strahlung* (Berlin, 1953), p. 148.

^(*) Sotto certi aspetti sarebbe opportuno riferirsi alla frazione di energia disponibile nel baricentro; alle alte energie tuttavia le due definizioni tendono ad identificarsi.

nucleone-nucleo che, se ha lo svantaggio di essere un metodo di determinazione indiretto, è d'altra parte uno dei pochi possibili. Applicheremo quindi il metodo descritto ad alcuni lavori sperimentali che, sebbene non siano stati eseguiti col fine di studiare il fattore di anelasticità degli urti, e quindi non siano i più adatti a questo scopo, forniscono già qualche dato indicativo.

2. — Omogeneità delle sezioni d'urto.

Supponiamo di avere, in un dato mezzo materiale omogeneo, un flusso di particelle (o quanti) di tipo a le quali, in ogni urto con i centri diffusori del mezzo, diano origine a particelle (o quanti) sia di tipo a che di tipo b .

Supporremo che le energie delle particelle siano così grandi che sia lecito:

a) trattare unidimensionalmente la propagazione (in un raffinamento del metodo non sarà difficile tener conto delle correzioni angolari);

b) trascurare l'energia eventualmente perduta per ionizzazione.

Sia ora $n_a(E, l)$ lo spettro differenziale energetico della radiazione a alla quota l nel dato mezzo, misurata in liberi cammini medi parallelamente alla direzione di propagazione, e sia $\varphi_{ba}(E, E_0)dE$ la probabilità che in un urto di un a avente energia E_0 contro un centro diffusore venga generato un b nell'intervallo energetico tra E e $E + dE$. Diremo $\varphi_{ba}(E, E_0)$ spettro di generazione di b da parte di a . Allora lo spettro differenziale energetico della radiazione b , generato per unità di spessore (libero cammino medio), e che diremo « spettro sorgente » di b e noteremo con $q_b(E, l)$, è data notoriamente da:

$$(1) \quad q_b(E, l) = \int_E^{\infty} \varphi_{ba}(E, E_0) n_a(E_0, l) dE_0.$$

Vogliamo ora dimostrare la seguente proposizione:

I) Condizione necessaria e sufficiente affinché, essendo $n_a(E_0, l)$ della forma:

$$(2) \quad n_a(E_0, l) = \frac{K_a}{E_0^{s+1}} L(l),$$

sia anche $q_b(E, l)$ della forma:

$$(3) \quad q_b(E, l) = \frac{K_b(s)}{E^{s+1}} L(l),$$

per qualsiasi valore di s , con K_a e s costanti, e $L(l)$ e $K_b(s)$ indipendenti da E , è che $\varphi_{ba}(E, E_0)$ sia di tipo omogeneo.

È ben noto che la condizione enunciata è sufficiente, ci limiteremo quindi a dimostrare che essa è anche necessaria.

Supponiamo verificate le (2) e (3); sostituiamole nella (1), passiamo dalla variabile di integrazione E_0 alla $\eta = E/E_0$ ed otteniamo l'identità:

$$(4) \quad K_b(s) \equiv K_a \int_0^1 \eta^{s-1} \varphi_{ba} \left(E, \frac{E}{\eta} \right) E d\eta,$$

dovendo questa esser valida per ogni valore di s si deduce che

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial E} \left[\varphi_{ba} \left(E, \frac{E}{\eta} \right) E \right] \equiv 0,$$

la quale afferma che φ_{ba} è una funzione omogenea con grado di omogeneità -1 ; infatti indicata con C una costante arbitraria dovrà essere

$$(6) \quad \varphi_{ba}(E, E_0) = C \varphi_{ba}(CE, CE_0).$$

Ponendo in particolare $C = E_0^{-1}$ si ottiene così

$$(7) \quad \varphi_{ba}(E, E_0) dE = \varphi_{ba}(\eta, 1) d\eta = \Phi_{ba}(\eta) d\eta \quad \text{c. d. d.}$$

Ammesse dunque le (2) e (3), la (1) si potrà scrivere:

$$(8) \quad q_b(E, l) = n_a(E, l) \int_0^1 \eta^s \Phi_{ba}(\eta) d\eta = m_{ba}(s) n_a(E, l),$$

dove $m_{ba}(s)$ non è che la trasformata di Mellin dello spettro di generazione Φ_{ba} . In altre parole quando si abbiano due componenti con spettro di potenza, tra di loro in equilibrio (nel senso della validità delle (2) e (3)), lo spettro sorgente dalla componente generata non è che il prodotto dello spettro della radiazione generante per la trasformata di Mellin (relativa all'esponente dello spettro integrale) dello spettro di generazione proporzionale alla sezione d'urto.

Osservando ora che

$$(9) \quad m_{ba}(1) = \int_0^1 \eta \Phi_{ba}(\eta) d\eta = \frac{\int_0^{E_0} \varphi_{ba}(E, E_0) E dE}{E_0} = \gamma_{ba},$$

il numeratore del terzo membro non è che l'energia media che, in ogni urto,

a trasmette alla radiazione b e quindi γ_{ba} è, per definizione, il fattore di anelasticità negli urti di a .

Noi supporremo d'ora in poi di aver normalizzato le sezioni d'urto omogenee in modo tale che

$$(10) \quad \int_0^{E_0} \bar{\varphi}(E, E_0) E dE = E_0$$

così che, nella trasformata di Mellin $m_{ba}(s)$, si possa mettere in evidenza il fattore di anelasticità:

$$(11) \quad m_{ba}(s) \equiv m_{ba}(1) \bar{m}_{ba}(s) = \gamma_{ba} \bar{m}_{ba}(s),$$

e \bar{m}_{ba} è la trasformata di $\bar{\varphi}_{ba}$. Sostituendo questa nella (8) si vede che, come era da aspettarsi, lo spettro sorgente, nelle ipotesi poste, è proporzionale al fattore di anelasticità.

Analoghe considerazioni si possono fare sulla propagazione della componente a . Vale precisamente la proposizione:

II) Condizione necessaria e sufficiente affinché una radiazione propagantesi in un mezzo e avente spettro energetico di potenza venga assorbita con legge esponenziale, con coefficiente d'assorbimento dipendente solo dalla pendenza dello spettro; in formule:

$$(12) \quad n_a(E, l) = \frac{K}{E^{s+1}} \exp[-\lambda(s)l],$$

con K e s costanti arbitrarie e λ funzione della sola s ; è che la sezione d'urto di rigenerazione della radiazione sia di tipo omogeneo.

Anche in questo caso ci limiteremo a dimostrare la necessità della condizione.

Nelle ipotesi poste la propagazione della radiazione viene regolata dalla nota equazione:

$$(13) \quad \frac{\partial n_a(E, l)}{\partial l} = -n_a(E, l) + \int_E^\infty \varphi_{aa}(E, E_0) n_a(E_0, l) dE_0.$$

posto che essa abbia per soluzione la (12) segue l'identità:

$$(14) \quad 1 - \lambda(s) \equiv \int_0^1 \eta^{s-1} \varphi_{aa}\left(E, \frac{E}{\eta}\right) E d\eta,$$

da cui segue come in I) che

$$(15) \quad \varphi_{aa}(E, E_0) dE = \Phi_{aa}(\eta) d\eta \quad \text{c. d. d.}$$

Analogamente a quanto visto nella I) si ottiene che nelle ipotesi poste:

$$(16) \quad \lambda(s) = 1 - m_{aa}(s) = 1 - \gamma_{aa} \cdot \bar{m}_{aa}(s),$$

dove $\bar{m}_{aa}(s)$ è la trasformata di Mellin di φ_{aa} .

Combinando le proposizioni I) e II) si possono agevolmente dimostrare proposizioni analoghe alla II) in cui si abbia una radiazione formata da più componenti rigenerantisi vicendevolmente a cascata.

Un noto esempio al quale le considerazioni fin qui svolte sono applicabili è la cascata fotoelettronica alle alte energie (approssimazione A).

3. - La componente N dei raggi cosmici.

Da quanto esposto in § 2, risulta anzitutto che dallo studio dello spettro e dell'assorbimento di una o più componenti sviluppantisi a cascata si possono ricavare informazioni sulle proprietà delle sezioni d'urto elementari. Risulta altresì che, affinché il fattore di anelasticità sia indipendente dall'energia, basta che le sezioni d'urto elementari siano di tipo omogeneo. Ora questo non sarà certamente da aspettarsi nei pressi dell'energia di soglia di creazione di b dove, per esempio, γ_{ba} dal valore 0 passa ad un valore discreto (≤ 1), e neanche ad energie superiori a quelle di soglia, ma non relativistiche o appena relativistiche; per queste energie le sezioni d'urto saranno semmai omogenee nel sistema del baricentro (in tal caso γ si riferisce all'energia disponibile nel baricentro). È evidente quindi che le regioni d'energia alle quali andranno applicati i criteri del paragrafo precedente saranno quelle in cui le energie sono molto elevate. Ora alle elevate energie la componente nucleonica dei raggi cosmici presenta appunto, come è noto, uno spettro energetico che si può con buona approssimazione considerare di potenza e con assorbimento esponenziale, e le osservate piccole deviazioni da queste leggi si possono spiegare bene con la deviazione dello spettro primario dallo spettro di potenza ⁽²⁾; ammetteremo dunque che la sezione d'urto elementare della cascata nucleonica alle alte energie si possa con buona approssimazione ritenere omogenea. Si potrebbe obiettare che in base alla proposizione II) sarebbe necessario verificare l'assorbimento esponenziale per più valori dell'esponente; tuttavia si

(²) P. BUDINI e G. LANZA: *Nuovo Cimento*, **9**, 381 (1952).

vede facilmente in base alla (14) che sarebbe necessario fare delle ipotesi molto artificiose e fisicamente poco plausibili sulla sezione d'urto per ottenere un assorbimento esponenziale indipendente dall'energia con una sezione d'urto non omogenea anche per un particolare valore di s .

Con lo stesso criterio, dal fatto che lo spettro sorgente della componente μ alle alte energie riproduce con buona fedeltà lo spettro della componente nucleonica d'alta energia $(^3)$ e dall'omogeneità dello spettro sorgente $\pi > \mu$, si può dedurre che la sezione d'urto di generazione dei mesoni π alle alte energie si può, con buona approssimazione, ritenere omogeneo.

Si dice generalmente componente « N » quella formata dai nucleoni e da tutte le altre particelle create nelle esplosioni nucleari che siano capaci di generare ulteriori esplosioni. Nell'aria la componente « N » di media ed alta energia (> 2 GeV) è costituita essenzialmente da nucleoni e dalla frazione dei mesoni π carichi che urtano contro un nucleo prima di decadere in mesoni μ ; questa frazione dipende dall'allungamento relativistico della vita media del π e quindi dall'energia della componente « N ». Nei mezzi condensati invece, praticamente nessuno dei mesoni π relativistici fa in tempo a decadere e quindi tutti contribuiscono alla componente « N ».

Non ci risulta che esistano indicazioni sperimentali che permettano di distinguere lo spettro delle particelle uscenti da esplosioni nucleari con primari nucleonici da quello delle esplosioni con primari mesonici; quindi noi ammetteremo che questi spettri, a parità di altre condizioni, siano gli stessi. Avremo in tal caso che l'equazione di diffusione della componente « N », nella quale tutti i mesoni π carichi ($2/3$ del totale) contribuiscono alla cascata, sarà:

$$(17) \quad \frac{\partial N(E, l)}{\partial l} = -N(E, l) + \int_0^\infty \left[\varphi_{pN}(E, E_0) + \frac{2}{3} \varphi_{\pi N}(E, E_0) \right] N(E_0, l) dE_0,$$

dove φ_{pN} e $\varphi_{\pi N}$ sono gli spettri di generazione dei nucleoni e dei mesoni π nell'urto di una particella « N » contro un nucleo e che, per quanto discusso sopra, si pensano omogenei.

Per le ipotesi fatte la (17) ha per soluzione:

$$(18) \quad N(E, l) = \frac{K}{E^{s+1}} \exp \left[1 - \gamma_{pN} \bar{m}_{pN}(s) - \frac{2}{3} \gamma_{\pi N} \bar{m}_{\pi N}(s) \right] l,$$

con cammino d'assorbimento

$$(18') \quad l_N^{-1} = 1 - \gamma_{pN} \cdot \bar{m}_{pN}(s) - \frac{2}{3} \gamma_{\pi N} \cdot \bar{m}_{\pi N}(s).$$

(³) P. BUDINI e G. MOLIÈRE: *Kosmische Sstrahlung* (edito da W. HEISENBERG) (Berlin, 1953), p. 380.

Se invece *nessuno* dei π contribuisse alla componente « N » basterebbe porre nella (17) $\varphi_{\pi N} = 0$ e si avrebbe per soluzione

$$(19) \quad P(E, l) = \frac{K}{E^{s+1}} \exp - [1 - \gamma_{\pi N} \bar{m}_{\pi N}(s)] l,$$

con cammino d'assorbimento

$$(19') \quad l_P^{-1} = 1 - \gamma_{\pi N} \bar{m}_{\pi N}(s).$$

Dalla differenza tra (19') e (18') si ottiene:

$$(20) \quad \delta = l_N \left(\frac{1}{l_P} - \frac{1}{l_N} \right) = \frac{l_N - l_P}{l_P} = \frac{2}{3} l_N \gamma_{\pi N} \bar{m}_{\pi N}(s),$$

la quale afferma che l'allungamento relativo del cammino d'assorbimento per il contributo dei mesoni π alla cascata nucleonica è proporzionale al fattore di anelasticità $\gamma_{\pi N}$.

Supponiamo di poter misurare δ e di poter determinare $\bar{m}_{\pi N}(s)$: la (20) permette allora di calcolare il fattore di anelasticità $\gamma_{\pi N}$.

Per la misura di δ il metodo ideale sarebbe quello di prendere un mezzo rarefatto (aria) e fare una misura accurata del cammino d'assorbimento ad energie alle quali praticamente *tutti* i π decadono (nell'aria $2 \text{ GeV} < E < 10 \text{ GeV}$) e poi fare la stessa misura in un mezzo condensato di uguale numero atomico (acqua o idealmente aria liquida).

Nel caso di un mezzo denso, dato il contributo di tutti i mesoni π relativistici alla componente « N », in generale si misura l_N ; se però ci si limita a considerare i primari scarichi, tenuto conto che i mesoni π neutri praticamente non urtano mai, e che i neutroni dell'energia considerata ($\geq 2 \text{ GeV}$) hanno lo stesso spettro dei protoni, si ottiene praticamente l_P (*).

La determinazione di $m_{\pi N}$ potrebbe essere fatta conoscendo lo spettro di generazione dei π nell'urto « N » \rightarrow nucleo. Converrà prendere una $\bar{\varphi}_{\pi N}$ della forma (3):

$$(21) \quad \bar{\varphi}_{\pi N} = -[(\alpha - 1)! \eta \log^{1-\alpha} \eta]^{-1}$$

e dedurre α dalla pendenza dello spettro di generazione dei π . Secondo l'osservazione di CAMERINI e coll. (4), i quali rilevano che lo spettro energetico dei mesoni

(*) Data la forte pendenza dello spettro nucleonico alle energie considerate, il contributo del secondo ordine dei π alla componente neutrale (neutroni energetici secondari dei π) si può ritenere trascurabile.

(4) U. CAMERINI, P. H. FOWLER, W. O. LOCK e H. MUIRHEAD: *Phil. Mag.*, **41**, 413 (1950).

creati è, entro i limiti di misura, indipendente dalla natura del nucleo in cui i mesoni sono stati creati, α dovrebbe essere indipendente dal numero atomico del mezzo. Nel caso dell'aria, e usando la sezione d'urto (21), si trova un buon accordo con i dati sperimentali ponendo $\alpha = 2,2$ ⁽³⁾. Per i nuclei più pesanti è da prevedere tuttavia che future più precise esperienze, suggeriscano per α dei valori un po' più alti.

Con la scelta (21), la $m_{\pi N}$ assume la semplice espressione:

$$(22) \quad m_{\pi N} = s^{-\alpha}.$$

Consideriamo in particolare il caso che si vogliano eseguire misure di $\gamma_{\pi N}$ in due materiali di numero atomico diverso; se si ammette l'omogeneità delle sezioni d'urto nucleone-nucleo, la quale presuppone quella della sezione d'urto nucleone-nucleone, s non dovrebbe dipendere dal numero atomico. Questa indipendenza, che potrebbe essere una riprova dell'ipotesi della omogeneità delle sezioni d'urto, è stata messa in evidenza da ROSSER e SWIFT ⁽⁵⁾. In tal caso per la (20) e la (22) si ha:

$$(23) \quad \frac{\delta(Z_1)}{\delta(Z_2)} = \frac{l_N(Z_1)}{l_N(Z_2)} \cdot \frac{\gamma_{\pi N}(Z_1)}{\gamma_{\pi N}(Z_2)} = s^{(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

che potrebbe permettere di studiare il comportamento di $\gamma_{\pi N}$ in funzione di Z .

4. — Applicazione ai dati sperimentali e discussione.

Dalle precedenti considerazioni risulta che il fattore di anelasticità, per produzione di mesoni π , $\gamma_{\pi N}$, si può determinare nei vari elementi quando si conosca in essi il cammino di assorbimento delle diverse componenti della nucleonica. I dati esistenti al riguardo non sono nè molto estesi nè molto concordanti, ma tuttavia sufficienti a dare un'indicazione sul valore di $\gamma_{\pi N}$ in carbonio e piombo. A ciò possono servire rispettivamente le due esperienze di BARTON, GEORGE e JASON ⁽⁶⁾ e di ROSSER e SWIFT ⁽⁵⁾.

BARTON, GEORGE e JASON hanno misurato il cammino di assorbimento della nucleonica nel carbonio ($\lambda_n(C) = 166 \pm 8 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$) e nell'aria ^(*) ($\lambda_n(\text{aria}) =$

⁽⁵⁾ W. G. V. ROSSER e M. W. SWIFT: *Phil. Mag.*, **52**, 856 (1951).

⁽⁶⁾ J. C. BARTON, E. P. GEORGE e A. C. JASON: *Proc. Phys. Soc.*, A **64**, 175 (1950).

^(*) Questo valore è più grande di quello comunemente accettato, tuttavia avendo in questo caso interesse l'omogeneità del metodo di misura in aria-carbonio, noi ci atterremo ad esso.

$= 150 \pm 4 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$), usando la tecnica delle lastre nucleari. Ammettendo la validità di una legge del tipo $\lambda_a \propto A^{1/3}$, e partendo dal valore di $\lambda_a(\text{aria}) = 150 \pm 4 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$, si dovrebbe ottenere $\lambda_a(\text{C}) = 141 \pm 4 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$, e cioè nel carbonio il cammino di assorbimento dovrebbe essere più piccolo che nell'aria anziché più grande, come osservato sperimentalmente.

Per quanto sopra esposto e per quanto proposto dagli stessi Autori la differenza fra i due cammini di assorbimento può venir spiegata con la presenza della componente pionica instabile nella nucleonica, che è capace di produrre stelle nel materiale più condensato mentre decade, prima di farlo, nell'aria. Noi interpreteremo quindi $\lambda_p = 141 \pm 4 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ e $\lambda_N = 166 \pm 8 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ come espressioni del cammino di assorbimento della nucleonica pura e della nucleonica accompagnata dai π , in carbonio.

Assumendo per s , e rispettivamente per α , i valori trovati per altra via, per l'aria, pari a 1,6 e 2,2, e prendendo per il libero cammino medio in aria $60 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$, si ottiene dalla (20):

$$(24) \quad \gamma_{\pi N} = 0,25 \pm 0,10 \quad (\text{carbonio}).$$

Nell'aria il valore di $\gamma_{\pi N}$ si può determinare anche da considerazioni sull'equilibrio delle componenti dei raggi cosmici ⁽³⁾; il valore che si ottiene allora per $\gamma_{\pi N}$ per le medie energie ($\geq 2 \text{ GeV}$) risulta 0,2 in discreto accordo con quello ora ottenuto.

Nel caso di materiali di elevato numero atomico (piombo) la distinzione fra il cammino di assorbimento della nucleonica pura e di quella accompagnata dalla pionica carica si può agevolmente ottenere utilizzando i dati riportati dall'esperienza di ROSSER e SWIFT.

Data l'accennata identità fra lo spettro protonico e quello neutronico alle alte energie gli eventi del tipo $1n + 2n + 3n \dots$ si possono identificare come dovuti alla nucleonica pura di media ed alta energia (si vede facilmente che il contributo dei π a questa componente dovrebbe esser solo trascurabile) mentre gli eventi in cui compaiono primari carichi risentiranno del contributo della generazione di stelle da parte dei π nel materiale condensato.

Nello spirito di quanto osservato precedentemente si dovrebbe fare un confronto paragonando eventi della medesima energia. È difficile stabilire una relazione univoca fra il numero di rami relativistici e l'energia del primario. Poichè sarà comunque da presumere che gli eventi corrispondenti a $1n + 2n + 3n \dots$ staranno fra gli $1p + 1n + 2p + 2n \dots$, e gli $0p + 1p + 1n + 2p \dots$ dato che molte delle stelle con primario π cadranno nella categoria $0p$, abbiamo preso in considerazione ambedue questi tipi di eventi.

Dai dati del citato lavoro si ottengono i seguenti cammini d'assorbimento:

I) stelle: $1n + 1p + 2n + 2p \dots$

$$\lambda_a = 316 \pm 27 \text{ g cm}^{-2};$$

II) stelle: $0p + 1n + 1p + 2n \dots$

$$\lambda_a = 339 \pm 15 \text{ g cm}^{-2};$$

mentre per l'assorbimento della nucleonica in eventi del tipo: $1n + 2n + 3n \dots$ si ottiene:

$$\lambda_a = 266 \pm 34 \text{ g cm}^{-2}.$$

Si assume anche questa volta come esponente dello spettro primario il valore $s = 1,6$, e per α abbiamo assunto il valore 2,2 già adottato per il carbonio e a titolo indicativo il valore $\alpha = 3$. Per il libero cammino medio nel Pb abbiamo preso 155 g cm^{-2} .

Sostituendo i valori predetti nella formula generale, si ritrovano per i diversi casi:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I)} \quad \gamma_{\pi N} = \left\{ \begin{array}{l} 0,45 \pm 0,37, \quad \alpha = 2,2 \\ 0,65 \pm 0,56, \quad \alpha = 3 \end{array} \right. \\ \text{II)} \quad \gamma_{\pi N} = \left\{ \begin{array}{l} 0,6 \pm 0,33, \quad \alpha = 2,2 \\ 0,86 \pm 0,52, \quad \alpha = 3 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{piombo})$$

Come si vede gli errori statistici sono grandi ed è da augurarsi che con future misure, che diano valori più accurati dei cammini d'assorbimento, tali errori possano venire ridotti. Tuttavia dalle (25) risulta che i valori di $\gamma_{\pi N}$ per il Pb dovrebbero essere più vicini ad 1 che non negli elementi leggeri e questo è quanto ci si deve ragionevolmente aspettare se si ammette che la cascata nel nucleo abbia parte importante nella determinazione della molteplicità dei mesoni creati nella esplosione nucleare.

Questo dovrebbe valere naturalmente solo per energie ben al di là della soglia di produzione dei mesoni. In prossimità della soglia invece è da aspettarsi un andamento opposto di $\gamma_{\pi N}$ in funzione del numero atomico (diminuzione di $\gamma_{\pi N}$ all'aumentare di Z) per la possibilità di cattura dei mesoni di bassa energia da parte dei nucleoni del nucleo, come mostrato appunto dalle esperienze di BONETTI, DALLAPORTA, MERLIN e DASCOLA (⁷).

I valori di $\gamma_{\pi N}$ determinati con le sopraesposte, seppur approssimate stime tenderebbero a suggerire bassi valori per l'anelasticità nell'urto nucleone-nucleone. Sarebbe da augurarsi che questo risultato di notevole interesse teorico

(⁷) A. BONETTI, N. DALLAPORTA, M. MERLIN e G. DASCOLA: *Nuovo Cimento*, **10**, 215 (1953).

venisse confermato (o smentito) da ulteriori più precise misure che potrebbero anche fornire informazioni sulla eventuale dipendenza del fattore di anelasticità dall'energia del primario, prevista della recente teoria di W. HEISENBERG ⁽¹⁾.

Gli autori desiderano esprimere la loro gratitudine al prof. NICOLÒ DAL-
LAPORTA per il suo gentile interessamento e per utili discussioni sull'argomento.

SUMMARY

The purpose is to establish a method for determining the mean anelasticity factor γ in nuclear collisions of high energy, that is the fraction of the energy of the primary which is converted in mesons (§ 1). It is demonstrated that necessary and sufficient condition for a primary radiation, with spectrum of the form (2), to produce a secondary one with a source spectrum of the form (3), for every s , is that the elementary cross-section be homogeneous, that is of the form (7). In this case the anelasticity factor γ is given by (9), which is the Mellin transform of the production spectrum (cross-section), with the parameter $s = 1$. A similar property is valid for the absorption of the primary radiation: if it has a power spectrum and is exponentially absorbed ((12) for every s) than the elementary reproduction cross-section is of the homogeneous type and the absorption coefficient is given by (16) (§ 2). The behaviour of the « N » component of cosmic rays suggests that the elementary cross-sections of the nuclear cascade for high energies, must be, with good approximation, of homogeneous type. In this hypothesis the spectrum of the « N » component, with and without the π meson contribution, is well represented for high energies, by (18) and (19) respectively; it follows that the relative lengthening δ of the mean absorption path is proportional to the anelasticity factor γ , as given by (20). This in principle provides a way of determining γ . The ratio of δ for two materials of different atomic number is given by (23) (§ 3). If one register the « N » component traversing a dense material (where practically no relativistic π -meson decays) through the primaries of the nuclear collisions (for example with nuclear emulsions) selecting events with neutral (principally neutrons) and charged (principally protons + mesons) primaries, one may obtain an indication of the mean absorption path with and without the contribution of the π mesons (§ 4). With these criteria values of γ are obtained from the experimental data of BARTON, GEORGE and JASON ⁽²⁾ in carbon and of ROSSER and SWIFT ⁽³⁾ in lead (25). The results are discussed (§ 4).

Processi del second'ordine dell'interazione alla Fermi.

P. BUDINI

Istituto di Fisica dell'Università - Trieste

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova

(ricevuto il 13 Luglio 1953)

Riassunto. — Si studia lo scattering di due fermioni come processo del second'ordine dell'interazione diretta tra campi spinoriali nell'ambito di una teoria non locale covariante. Con opportuna scelta del fattore di forma si possono ricavare elementi di matrice caratteristici di interazioni sia a corto che a lungo raggio d'azione. Si applicano i risultati al calcolo della sezione d'urto elettrone-neutrino.

1. — Introduzione.

In un precedente lavoro ⁽¹⁾ (citato nel seguito con I) è stata impostata la trattazione non locale dell'interazione tra particelle di Fermi. L'introduzione della non localizzabilità dell'interazione ha interesse soprattutto in quanto essa permette l'eliminazione, almeno parziale, delle divergenze dalla teoria. Sembra accertato che l'interazione diretta tra particelle di Fermi non è rinormalizzabile. La trattazione non locale costituisce pertanto, per questa teoria, assieme al metodo della regolarizzazione ⁽²⁾ l'unica possibile via covariante di eliminazione delle divergenze dai vari ordini della matrice S . Ci proponiamo, nel presente lavoro, di studiare lo scattering tra particelle di Fermi come processo del secondo ordine nella teoria dell'interazione diretta.

Anche in questo, come negli altri casi di trattazione non locale, ci si imbatte nella grande arbitrarietà di scelta del fattore di forma; vedremo che appunto grazie a questa arbitrarietà la trattazione non locale permette di descrivere interazioni tra le particelle corrispondenti a forze sia a corto che a lungo raggio

⁽¹⁾ P. BUDINI e C. VILLI: *Nuovo Cimento*, **10**, 1172 (1953).

⁽²⁾ W. PAULI e F. VILLARS: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 434 (1949).

d'azione. Come esempio di applicazione numerica calcoleremo infine l'elemento di matrice di scattering elettrone-neutrino.

2. - L'elemento matrice.

È stato mostrato in I che il secondo termine della matrice S (quadratico nella costante di accoppiamento) è esprimibile nella forma:

$$(1) \quad S_2 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

con

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1 = -g^2 \int \bar{\psi}_4(8) \Omega \psi_3(7) \bar{\psi}_2(6) \Omega S_1(5-1) \Omega \psi_2(2) \psi_3(3) \Omega \psi_4(4) F(1234) F(5678) \cdot \\ \quad \cdot d(12345678), \\ T_2 = -g^2 \int \bar{\psi}_1(1) \bar{\psi}_4(4) \Omega \psi_3(7) \Omega S_2(2-6) \Omega \psi_1(5) \bar{\psi}_3(3) \Omega \psi_4(4) F(1234) F(5678) \cdot \\ \quad \cdot d(12345678), \\ T_3 = -g^2 \int \bar{\psi}_1(1) \Omega \psi_2(2) \bar{\psi}_4(8) \Omega \bar{S}_3(7-3) \bar{\psi}_2(6) \Omega \psi_1(5) \Omega \psi_4(4) F(1234) F(5678) \cdot \\ \quad \cdot d(12345678), \\ T_4 = -g^2 \int \bar{\psi}_1(1) \Omega \psi_2(2) \bar{\psi}_3(3) \Omega S_4(4-8) \Omega \psi_3(7) \bar{\psi}_2(6) \Omega \psi_1(5) F(1234) F(5678) \cdot \\ \quad \cdot d(12345678), \end{array} \right.$$

dove le ψ rappresentano i campi in arrivo e gli altri simboli hanno lo stesso significato di quello già definito in I.

Questi operatori hanno elementi di matrice non nulli per le transizioni tra stati con una particella libera: in tal caso per il principio di conservazione dell'energia e dell'impulso la particella deve essere dello stesso tipo sia nello stato iniziale che in quello finale, e l'elemento di matrice diagonale, rappresenta l'automassa della particella stessa. Oppure tra stati con due particelle. In tal caso si vede facilmente che le particelle nello stato iniziale (finale) debbano essere distinte tra di loro a meno che per una qualsiasi coppia di indici i, k non avvenga che $\psi_i = \psi_k$. In ogni caso le due particelle nello stato iniziale debbono essere le medesime di quelle nello stato finale. Si ha cioè un processo di scattering.

Supponiamo ora che sia $\psi_i \neq \psi_k$ per $i, k = 1 \dots 4$ e proponiamoci di studiare lo scattering delle particelle ψ_3 e ψ_4 . Gli operatori T_3 e T_4 avranno elementi di matrice nulli per questo processo in quanto essi descrivono transizioni tra stati in cui una sola delle particelle ψ_3 e ψ_4 è presente.

Ricordando che le ψ rappresentano i campi in arrivo e che quindi:

$$(3) \quad \begin{cases} \langle 0 | \bar{\psi}_2(6) \psi_2(2) | 0 \rangle = -i S_2^{(-)}(2-6), \\ \langle 0 | \bar{\psi}_1(1) \psi_1(5) | 0 \rangle = -i S_1^{(-)}(5-1), \end{cases}$$

si ottiene che l'elemento di matrice del processo è:

$$(4) \quad \mathcal{M} = ig^2 \int \bar{\psi}_4(8) \bar{\psi}_2(3) [\Omega S_2^{(-)}(2-6) \Omega S_1(5-1) + \Omega S_1^{(-)}(5-1) \Omega S_2(2-6)] \cdot \\ \cdot \Omega \psi_3(7) \Omega \psi_4(4) F(1234) F(5678) d(12345678).$$

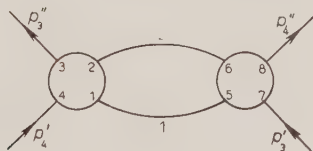


Fig. 1.

Per il calcolo conviene scrivere l'elemento di matrice nello spazio dei momenti, a tal fine poniamo:

$$(5) \quad F(1234) = (2\pi)^{-12} \int G(q_1 q_2 q_3 q_4) \delta(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \exp [i(q_1 1 + q_2 2 + \\ + q_3 3 + q_4 4) d(1234) ;$$

$$(6) \quad \psi_n(x) = (2\pi)^{-3/2} u_n(p) \exp [ipx]$$

con

$$(7) \quad u_n^*(p) u_n(p) = 1 ;$$

$$(8) \quad \bar{S}_n(x) = \frac{1}{2} \left[S_n^{\text{ret}}(x) + S_n^{\text{av}}(x) \right]$$

con

$$(9) \quad S_n^{\text{ret}}(x) = i(2\pi)^{-4} \exp [\sigma_0 x_0] \int \frac{\mathcal{K} + i\sigma + iM_n}{(K^2 + i\sigma)^2 + M_n^2} \exp [iKx] dK,$$

$$(10) \quad S_n^{\text{av}}(x) = i(2\pi)^{-4} \exp [-\sigma_0 x_0] \int \frac{\mathcal{K} - i\sigma + iM_n}{(K^2 - i\sigma)^2 + M_n^2} \exp [iKx] dK ;$$

$$(11) \quad S_n^{(-)}(x) = - (2\pi)^{-3} \int (\mathcal{K} + iM_n) \delta(K^2 + M_n^2)^{-1/2} \exp [iKx] dK,$$

dove

$$\mathcal{K} = K_\mu \gamma^\mu ; \quad K^2 = K_\mu K^\mu = K^2 - K_0^2 ; \quad \varepsilon(K) = \pm 1 ,$$

corrispondente al segno di K_0 ; σ è un vettore di componenti $(0, 0, 0, \sigma_0)$ con σ_0 numero reale positivo che alla fine si farà tendere a 0. Supporremo ora che si possa porre $M_1 = M_2 = M$. In tal caso, se il fattore di forma è della classe normale, la (4) si può porre nella forma (v. Appendice):

$$(12) \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}'(\Delta) + \mathcal{M}'(-\Delta),$$

dove:

$$(13) \quad \mathcal{M}'(\Delta) = -2^{-7} \pi^{-6} g^2 \bar{u}(p_4'') \Omega u(p_4') \bar{u}(p_3'') \Omega u(p_3') \delta(p_4'' + p_3'' - p_4' - p_3') \cdot \\ \cdot \int G(K - \Delta, -K, p_3'', -p_4') G(-K + \Delta, K, -p_3', p_4') \cdot \\ \cdot \frac{Tr[\mathcal{O}(K + iM) \Omega(K - \Delta + i\sigma + iM)]}{[(K - \Delta + i\sigma)^2 + M^2] (K^2 + M^2)} dK,$$

con

$$(14) \quad \Delta = p_3'' - p_4' = p_3' - p_4''.$$

Nel caso locale, cioè per $G = 1$, questo elemento di matrice presenta una divergenza quadratica (analoga al caso elettrodinamico della polarizzazione del vuoto) come era da aspettarsi.

I quadrivettori p' e p'' rappresentano gli impulsi-energie delle particelle libere rispettivamente prima e dopo l'urto, Δ è quindi un quadrivettore spaziale; anzi nel sistema del centro di massa, per energie relativistiche (ovvero per qualsiasi valore dell'energia se $M_3 = M_1$) si può porre $\Delta_0 = 0$; cosicchè $|\Delta|$ rappresenta il modulo dell'impulso trasferito. Noi supporremo nel seguito $|\Delta| \ll M$. In tal caso il cammino d'integrazione della (13) nel piano K_0 è regolare (lungo l'asse reale) basta immaginare che M abbia una infinitesima parte immaginaria negativa. La (13) è allora una funzione analitica di Δ e si può porre sin dall'inizio $\sigma = 0$ (*).

(*) Più grandi valori di $|\Delta|$ implicano l'apparizione di eventuali poli spostati (displaced ⁽³⁾) e quindi la possibilità di creazione delle particelle scambiate $\psi_1 \psi_2$ in stati reali. Questa eventualità potrebbe portare la discussione sulla possibilità che le particelle $\psi_1 \psi_2$ appaiano allo stato reale, già per valori di $|\Delta|$ relativamente bassi, in stati legati, sul modello di quanto proposto, per esempio, da FERMI e YANG ⁽⁴⁾ per l'interpretazione del mesone π come stato legato tra due nucleoni. Non entreremo nel presente lavoro in merito a tali considerazioni.

⁽³⁾ F. I. DYSON: *Phys. Rev.*, **75**, 1736 (1949).

⁽⁴⁾ E. FERMI e C. N. YANG: *Phys. Rev.*, **76**, 1739 (1949).

3. - Il fattore di forma.

Una importazione matematica di una teoria d'interazione non locale, quale quella da noi assunta, comporta generalmente una grande, secondo il parere di molti, troppo grande, arbitrarietà di scelta del fattore di forma. Questo stato di cose sottolinea, a nostro avviso, il carattere e il valore di formalismo essenzialmente matematico delle teorie non locali. È infatti da aspettarsi che in un formalismo così malleabile si possa inquadrare almeno qualche aspetto delle teorie future (così come alcuni aspetti della presente teoria possono essere in esso compresi (cfr. I)).

Allo stadio attuale sarà interessante studiare quali sono le proprietà fisiche dell'interazione che possono essere determinate dalla scelta del fattore di forma.

Le condizioni che solitamente si impongono al fattore di forma sono:

1) L'invarianza relativistica: per il che basta che la funzione G nella (5) sia invariante, cioè funzione di soli quadrati o prodotti scalari formati con le q_i .

2) L'identificarsi della teoria con la corrispondente locale per i campi lentamente variabili. Ciò equivale per noi a imporre che quando in un opportuno sistema di riferimento (per esempio, il sistema del baricentro) le minime lunghezze d'onda contenute in $\psi_i(x)$ tendono ad essere maggiori di una certa $\lambda_0 = 2\pi m^{-1}$ prefissata si possa porre:

$$(15) \quad \int F(1234) \psi_2(2) \bar{\psi}_3(3) \Omega \psi_4(4) d(234) = \psi_2(1) \bar{\psi}_3(1) \Omega \psi_4(1),$$

e le altre sette analoghe. Supposto che $\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4$ rappresentino particelle libere di impulsi, rispettivamente $p_1 p_2 p_3 p_4$, queste condizioni si traducono nelle:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} G(p_2 - p_3 + p_4, -p_2, p_3, -p_4) = 1 \\ G(p_1, p_4 - p_3 - p_1, p_3, -p_4) = 1 \\ G(p_1, -p_2, p_4 + p_2 - p_1, -p_4) = 1 \\ G(p_1, -p_2, p_3, p_2 - p_1 - p_3) = 1 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{per i campi lentamente} \\ \text{variabili} \end{array}$$

e le corrispondenti che si ottengono cambiando il segno alle p_i .

3) Convergenza se non della teoria almeno degli elementi di matrice nei successivi ordini di approssimazione.

4) L'assenza di azioni non casuali per grandi intervalli di tempo ⁽⁵⁾.

⁽⁵⁾ M. CHRÉTIEN e R. E. PEIERLS: *Nuovo Cimento*, **10**, 669 (1949).

Tutte e quattro le precedenti condizioni si possono soddisfare se si assume per G una espressione della forma:

$$(17) \quad G(q_1 q_2 q_3 q_4) = \frac{m^4}{m^4 + \Pi^4},$$

dove Π^4 è una opportuna combinazione invariante delle q_i . Naturalmente la (17) è tutt'altro che la più generale G che si possa pensare. Vedremo tuttavia che già la forma particolare (17) si presta ad interessanti considerazioni fisiche.

È chiaro che nel nostro caso la sola non localizzabilità dell'interazione ai punti 1 e 2 e ai punti 5 e 6 (v. fig. 1) è essenziale per l'eliminazione della divergenza nelle (12) e (13); e quindi, finchè le energie delle particelle interagenti non saranno estremamente grandi (\mathbf{p}'_3 e \mathbf{p}'_4 non troppo grandi) sarà sufficiente prendere Π funzione solo di q_1 e di q_2 (quando \mathbf{p}'_3 e \mathbf{p}'_4 diventeranno molto grandi l'effetto della trascurata non localizzabilità ai punti 3 e 4 e 7 e 8 sarà di ridurre l'elemento di matrice del processo).

Faremo ora due scelte per il fattore di forma:

I) Poniamo (*):

$$(18) \quad \Pi = \frac{1}{2} (q_1 - q_2) = K - \frac{\Delta}{2},$$

cosicchè la (13), eseguito il calcolo della traccia, e sostituitavi la (17) con la (18) per le G diventa:

$$(19) \quad \mathcal{M}'(\Delta) = -2^{-5} \pi^{-6} g^2 \bar{u}(p''_4) \Omega u(p'_4) \bar{u}(p''_3) \Omega u(p'_3) \delta^4(p''_4 + p''_3 - p'_4 - p'_3) \cdot \\ \cdot \int \frac{m^4}{[m^4 + (K - \Delta/2)^4]^2} \frac{\alpha[K^2 - K\Delta] + \beta M^2}{[(K - \Delta)^2 + M^2][K^2 + M^2]} dK,$$

con

$$(20) \quad \alpha = \begin{cases} -1 \\ +1 \\ +2 \end{cases}; \quad \beta = \begin{cases} +1 \\ +1 \\ +4 \end{cases} \quad \text{per } \Omega = \begin{cases} 1 & (\text{scalare}) \\ i\gamma^5 & (\text{pseudoscalare}) \\ i\gamma^\mu & (\text{vettoriale}). \end{cases}$$

Si vede sin d'ora che per $|\Delta| \rightarrow 0$ il fattore integrale tende ad un valor costante e che per $|\Delta|$ crescente esso diminuisce. Cioè \mathcal{M} presenta la dipendenza da Δ caratteristica delle interazioni a corto raggio d'azione; in altre parole con la scelta (18) l'interazione tra le particelle di Fermi è dello stesso

(*) Si otterrebbe un risultato essenzialmente equivalente ponendo:

$$\Pi^2 = \left[\left(\frac{q_1 - q_2}{2} \right) (q_1 + q_2) \right]^2 (q_1 + q_2)^{-2}.$$

tipo di quella che si sarebbe ottenuta se si fosse supposto che tra di esse agisca una forza a corto raggio d'azione.

Sarà ragionevole supporre che la regione di non localizzabilità sia dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda compton M^{-1} delle particelle virtuali scambiate, cioè porre $m = M$. Il calcolo della (19) si esegue agevolmente seguendo i noti procedimenti indicati da FEYNMAN ⁽⁶⁾. Si ottiene così, trascurando i termini dell'ordine di Δ^2/M^2 rispetto a 1:

$$(21) \quad \mathcal{M} = -i(2\pi)^{-1} \eta g^2 M^2 \bar{u}(p'_4) \Omega u(p'_4) \bar{u}(p''_3) \Omega u(p'_3) \delta^4(p''_4 - p''_3 - p'_4 - p'_3),$$

con

$$(22) \quad \eta = \begin{cases} 0,081 \\ 0,31 \\ 0,99 \end{cases} \quad \text{per } \Omega = \begin{cases} 1 & \text{(scalare)} \\ i\gamma^5 & \text{(pseudoscalare)} \\ i\gamma^\mu & \text{(vettoriale)}. \end{cases}$$

II) Poniamo ora

$$(23) \quad H^2 = m^{-2} \left(\frac{q_1 - q_2}{2} \right)^2 (q_1 + q_2)^2 = m^{-2} \left(K - \frac{\Delta}{2} \right)^2 \Delta^2$$

di modo che la (13) diventa

$$(24) \quad \mathcal{M}'(\Delta) = -2^{-5} \pi^{-6} g^2 \bar{u}(p'_4) \Omega u(p'_4) \bar{u}(p''_3) \Omega u(p'_3) \delta^4(p''_4 + p''_3 - p'_4 - p'_3) \cdot \\ \cdot \int \frac{m^8}{[m^4 + m^{-4} \Delta^4 (K - \Delta/2)^4]^2} \frac{\alpha [K^2 - K\Delta] + \beta M^2}{[(K - \Delta)^2 + M^2] [K^2 + M^2]} dK.$$

In questo caso si vede facilmente che al tendere a 0 di $|\Delta|$, $\mathcal{M}'(\Delta)$ aumenta indefinitamente. Si ottiene precisamente con elementari calcoli trascurando termini dell'ordine di Δ^2/M^2 rispetto a 1:

$$(25) \quad \mathcal{M} = -i(2\pi)^{-4} \alpha g^2 M^4 \delta^4(p''_4 + p''_3 - p'_4 - p'_3) \frac{\bar{u}(p'_4) \Omega u(p'_4) \bar{u}(p'_3) \Omega u(p'_3)}{(p''_3 - p'_4)^2},$$

con α dato dalle (20).

Se naturalmente si avesse $p_3 = p_4$ alla precedente andrebbe sottratto un termine di scambio in base al principio di esclusione.

L'elemento di matrice (25) è caratteristico delle interazioni a lungo raggio

⁽⁶⁾ R. P. FEYNMAN: *Phys. Rev.*, **76**, 769 (1949).

d'azione. Confrontando infatti la precedente con la nota espressione dell'elemento di matrice di scattering di Möller:

$$(26) \quad \mathcal{M}_{\text{Möller}} = -i(2\pi)^{-2}e^2 \delta^4(p_4'' + p_3'' - p_4' - p_3') \cdot \left[\frac{\bar{u}(p_4'')\gamma^\mu u(p_4')\bar{u}(p_3'')\gamma^\mu u(p_3')}{(p_4'' - p_3')^2} - \frac{\bar{u}(p_4'')\gamma^\mu u(p_3')\bar{u}(p_3'')\gamma^\mu u(p_4')}{(p_4'' - p_3'')^2} \right],$$

risulta che, con la scelta (23) per il fattore di forma, l'interazione tra le particelle di Fermi ψ_3 e ψ_4 è la stessa (per piccoli valori dell'impulso trasferito, e a meno di un termine di scambio) di quello che si sarebbe ottenuto se si fosse ammesso che tra di esse agisse una forza a lungo raggio d'azione (campo bosonico di massa propria nulla con carattere tensoriale determinato da Ω) con carica data dalla:

$$(27) \quad \frac{e_0^2}{4\pi\hbar c} = (2\pi)^{-3} \alpha \frac{g^2 c^2}{2\hbar^6} M^4.$$

È interessante osservare che questi risultati sono largamente indipendenti sia dalla particolare scelta (17) del fattore di forma che dalla regione di non localizzabilità M la quale ultima, con la scelta (23) determina secondo la (27) la costante di struttura fine della corrispondente descrizione tramite forze a lungo raggio d'azione.

4. - La sezione d'urto elettrone-neutrino.

Come esempio d'applicazione numerica delle precedenti considerazioni ci proponiamo di calcolare la sezione d'urto elastica elettrone-neutrino. Basta prendere a tal fine come interazione fondamentale quella responsabile del decadimento β , e considerare le $\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$ come funzioni d'onda (o operatori corrispondenti) del protone, neutrone, elettrone e neutrino rispettivamente. Avremo allora che M sarà la massa del nucleone e g la costante d'accoppiamento che porremo $\sim 2 \cdot 10^{-49} \text{ erg} \times \text{cm}^3$ (*).

Con la scelta (18) del fattore di forma l'elemento di matrice S è dato

(*) Un contributo alla sezione d'urto di scattering elettrone-neutrino si potrebbe ancora ottenere tramite il processo $\mu \rightleftharpoons e + \nu + \bar{\nu}$. Se tuttavia si assume, analogamente a quanto fatto nel testo, la regione di non localizzabilità avente dimensioni dell'ordine della lunghezza d'onda compton del μ si ottiene una sezione d'urto minore di quella calcolata nel testo per un fattore dell'ordine di 10^{-4} . Se si assume invece anche in questo caso $m = M$ si ottengono contributi dello stesso ordine di grandezza di quelli calcolati nel testo.

dalla (21). Ci riferiremo al sistema del baricentro delle due particelle e indicheremo con p il modulo dell'impulso (tridimensionale) di ciascuna delle due particelle. Si ricava allora per la sezione d'urto totale del processo:

$$(28) \quad \sigma = 2^{-6} \pi^{-5} g^4 M^4 |\bar{u}(p_e'') \Omega u(p_e') \bar{u}(p_e'') \Omega u(p_e')|^2 \frac{p^2 c}{\hbar^{10} (v_e'' + c)}.$$

Nel caso relativistico si può porre $v_e'' = c$, $||^2 = 1$ di modo che

$$(29) \quad \sigma = (2\pi)^{-5} \frac{g^4 M^4 p^2}{\hbar^{10}} = \begin{cases} 0,09 \\ 1,4 \\ 14 \end{cases} 10^{-46} p^2 c^2 \quad \text{per} \quad \begin{cases} \Omega = 1 & (\text{scalare}) \\ \Omega = i\gamma^5 & (\text{pseudoscalare}) \\ \Omega = i\gamma^\mu & (\text{vettoriale}), \end{cases}$$

dove pc è misura in erg e σ in cm^2 (*).

Queste sezioni d'urto sono naturalmente estremamente piccole, e, nella maggior parte dei casi esse non saranno confrontabili con quelle del primo ordine, per esempio, dell'interazione del neutrino con i nucleoni del nucleo, anche tenuto conto della riduzione che in questo caso si ha (ad energie non troppo elevate) per effetto delle regole di selezione nucleari. Le sezioni d'urto del primo ordine sono infatti (senza tener conto delle regole di selezione) circa 10^{14} volte più grandi che non quelle del secondo ordine.

Se nel caso dell'interazione elettrone-neutrino fosse applicabile la scelta (23) per il fattore di anelasticità, l'elemento di matrice S sarebbe dato dalla (25) e quindi, per quanto osservato sopra, la sezione d'urto (relativistica, altrimenti si deve tener conto del fatto che la velocità del neutrino è sempre c) sarebbe la stessa di quella dello scattering elettrone-elettrone (meno il termine di

(*) È interessante confrontare brevemente questi risultati con quello che si sarebbe ottenuto adottando un metodo di taglio non relativistico (cfr., per esempio, FERMI⁽⁷⁾). In tal caso, assumendo per elemento di matrice della transizione.

$$(3) \quad H_{n0} = \sum \frac{H_{nm} H_{m0}}{E_0 - E_m} = \frac{g^2 M^2 c}{12\pi^2 \hbar^3},$$

ottenuto limitando la somma a tutti gli stati intermedi con impulso minore di Mc (V è il volume di normalizzazione) si ottiene immediatamente:

$$(31) \quad \sigma_{Fe} = (2\pi)^{-5} \frac{g^4 M^4 p^2}{16\hbar^{10}} = 1,3 \cdot 10^{-46} p^2 c^2 \quad (\text{cm}^2),$$

con pc misurata in erg; essa, come si vede, è dello stesso ordine di grandezza di quello ottenuto con la teoria non locale.

(7) E. FERMI: *Particelle elementari* (Torino, 1953).

scambio) salvo a sostituire $4\pi\hbar c/e^2 = 137$ con

$$(32) \quad \frac{e_0}{4\pi\hbar c} = (2\pi)^{-3} \alpha \frac{g^2 c^2 M^4}{2\hbar^6} = \begin{cases} 8,57 \cdot 10^{-13} & \left\{ \begin{array}{l} \Omega = 1 \quad (\text{scalare}) \\ \Omega = i\gamma^5 \quad (\text{pseudoscalare}) \end{array} \right. \\ 1,71 \cdot 10^{-12} & \Omega = i\gamma^\mu \quad (\text{vettoriale}). \end{cases}$$

Siccome le sezioni d'urto sono proporzionali ai quadrati degli elementi di matrice, avremo che la sezione d'urto elettrone-elettrone ⁽⁸⁾ (senza il termine di scambio) e quella neutrino-elettrone, alle energie relativistiche (e per piccoli trasferimenti di energia: piccoli angoli) dovrebbero stare nel rapporto:

$$(33) \quad \frac{\sigma_{ee}}{\sigma_{\nu e}} \approx \begin{cases} 7,2 \cdot 10^{19} & \left\{ \begin{array}{l} \Omega = 1 \quad (\text{scalare}) \\ \Omega = i\gamma^5 \quad (\text{pseudoscalare}) \end{array} \right. \\ 1,8 \cdot 10^{19} & \Omega = i\gamma^\mu \quad (\text{vettoriale}). \end{cases}$$

In questo caso le sezioni d'urto (per piccoli trasferimenti d'energia) sono molto più grandi che non nel caso precedente (corto raggio d'azione) e potrebbero stare dentro il limite dello sperimentabile ⁽⁹⁾.

5. - Conclusione.

La teoria non locale fornisce dunque un formalismo covariante per l'eliminazione delle divergenze nella teoria dell'interazione diretta tra fermioni nel caso di scattering esaminato, così come, verosimilmente, negli elementi di matrice di autoenergia e negli elementi di matrice degli ordini successivi. Ciò naturalmente non comporta ancora la convergenza della serie di Dyson.

Questa teoria soffre tuttavia di una ancora troppo grande arbitrarietà sia nella scelta del taglio (m) che nel fattore di forma. Il fatto che, con una opportuna scelta di quest'ultimo, si riescono a descrivere interazioni corrispondenti (in seconda approssimazione) a forze sia a lungo che a corto raggio d'azione, potrebbe avere qualche più profondo significato fisico suscettibile di ulteriori sviluppi. È comunque da pensare che, in una formulazione soddisfacente, la determinazione del fattore di forma dovrebbe scaturire dall'interno della teoria e non essere una arbitraria imposizione formale come lo è attualmente.

⁽⁸⁾ N. F. MOTT e H. S. W. MASSEY: *The theory of atomic Collision* (Oxford, 1949), p. 368.

⁽⁹⁾ F. REINES e C. L. CORVAN: *Phys. Rev.*, **90**, 492 (1953).

Rimane anche in questo caso il fatto che l'attuale impostazione è atta a rappresentare particelle molli (nel significato di HEISENBERG) tendendo a 0 gli elementi di matrice di interazione (per la presenza di p_3'', p_4'', p_3', p_4' nelle G della (13)) alle altissime energie.

L'autore desidera manifestare la sua gratitudine al prof. F. G. HOUTERMANS e al dott. W. THIRRING per alcune interessanti discussioni sull'argomento del presente lavoro.

A P P E N D I C E

Inserite le (8), (9), (10), (11) nella (4) e posto $M_1 = M_2 = M$ si ha:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \mathcal{M} = & \frac{i}{2} g^2 \int \bar{\psi}_1(8) \bar{\psi}_3(3) \left\{ [\Omega S_2^{(+)}(2-6) \Omega S_1^{int}(5-1) + \Omega S_1^{(-)}(5-1) \Omega S_2^{av}(2-6)] + \right. \\
 & + [\Omega S_2^{(-)}(2-6) \Omega S_1^{av}(5-1) + \Omega S_1^{(-)}(5-1) \Omega S_2^{int}(2-6)] \left. \right\} \cdot \\
 & \cdot \Omega \psi_3(7) \Omega \psi_4(4) F(1234) F(5678) d(12345678) = \\
 = & 2^{-8} \pi^{-7} g^2 \int \left\{ \exp [i[K_1(2-6) + K_2(5-1)]] + \right. \\
 & + \exp [i[K_2(2-6) + K_1(5-1)]] \left. \right\} \cdot \\
 & \cdot \bar{\psi}_4(8) \bar{\psi}_3(3) \left\{ \frac{1 - \varepsilon(K_1)}{2} \frac{\text{Tr} [\Omega(\underline{K}_1 + iM) \Omega(\underline{K}_2 + i\sigma + iM)]}{(K_2 + i\sigma)^2 + M^2} \delta(K_1^2 + M^2) + \right. \\
 & + \frac{1 - \varepsilon(K_2)}{2} \frac{\text{Tr} [\Omega(\underline{K}_2 + iM) \Omega(\underline{K}_1 - i\sigma + iM)]}{(K_1 - i\sigma)^2 + M^2} \delta(K_2^2 + M^2) \left. \right\} \cdot \\
 & \cdot \Omega \psi_3(7) \Omega \psi_4(4) F(1234) F(5678) dK_1 dK_2 d(12345678),
 \end{aligned}$$

inserite ora in queste le (5) e (6) per le F e ψ ed eseguita l'integrazione sulle coordinate dello spazio-tempo (che sono elementari perchè portano a delle funzioni δ) e su tutte le coordinate dello spazio degli impulsi meno una (per esempio, K_1) si ottiene dopo elementari passaggi:

$$(2) \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}'(\Delta) + \mathcal{M}'(-\Delta),$$

con

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \mathcal{M}'(\Delta) = & \pi(2\pi)^{-6} g^2 \bar{u}(p_4'') \Omega u(p_4') \bar{u}(p_3'') \Omega u(p_3') \delta(p_4'' + p_3'' - p_4' - p_3') \cdot \\
 & \cdot \int G(K - \Delta, -K, p_3'', -p_4') G(-K + \Delta, K, -p_3', p_4') \cdot \\
 & \cdot \left\{ \frac{1 - \varepsilon(K)}{2} \frac{\text{Tr} [\Omega(\underline{K} + iM) \Omega(\underline{K} - \Delta + i\sigma + iM)]}{(K - \Delta + i\sigma)^2 + M^2} \delta(K^2 + M^2) + \right. \\
 & + \frac{1 - \varepsilon(K - \Delta)}{2} \frac{\text{Tr} [\Omega(\underline{K} - \Delta + iM) \Omega(\underline{K} - i\sigma + iM)]}{(K - i\sigma)^2 + M^2} \delta[(K - \Delta)^2 + M^2] \left. \right\} dK,
 \end{aligned}$$

dove Δ è data dalla (14).

Se ora la non localizzabilità è della classe normale ⁽¹⁰⁾ (cioè la pluralità delle soluzioni delle equazioni del moto non viene aumentata per effetto della non localizzabilità) le G non hanno poli sull'asse K_0 . Questa circostanza non sarà in pratica sempre realizzabile; per la validità dei calcoli che seguono basterà tuttavia supporre che tali poli se esistono siano spostati in regioni dove il loro contributo sia trascurabile (nel caso del testo $|\Delta| \ll M$).

In tal caso si ha ⁽¹¹⁾ che la (3) si identifica con la (13) del testo con cammino d'integrazione di Feynman nel piano K_0 .

⁽¹⁰⁾ W. PAULI: *Nuovo Cimento*, **10**, 648 (1953).

⁽¹¹⁾ F. I. DYSON: *Lecture Course* (Cornell, 1951), p. 92.

SUMMARY

The scattering of two Fermi-particles, as a second-order process of the direct interaction between spinor fields, is studied in the frame of a covariant non local theory. From the second-order S matrix (2) the matrix element of the graph of fig. 1 is calculated: forms (12) and (13) (details of calculation are in appendix). It is shown that if one chooses, the form (17), with (18) for the form factor, one obtains a matrix element (21) which is characteristic of short range forces; with the choice (23) one obtains the matrix element (25), characteristic of long range forces. This is largely independent from the particular choice (17) of the Fourier transform of the form factor and from the non localisability region m which determines, in the case of long range forces, the fine structure constant of the correspondent long range interaction (form (27)). As numerical example the results are applied to the calculation of the elastic scattering cross-section neutrino-electron. With the choice (18) the cross-section for relativistic energies is given by (29); (31) is the cross-section which would be obtained with a non relativistic cut-off technique (FERMI). Much higher values are obtained for the cross-sections with the choice (23): the ratio of the cross-sections electron-electron (MÖLLER) and neutrino-electron would in this case be given by (33).

Sul contributo delle forze tensoriali ai momenti di quadrupolo dei nuclei pesanti.

R. GATTO

Istituto di Fisica dell'Università - Roma

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Roma

(ricevuto il 14 Luglio 1953)

Riassunto. — Viene valutato il contributo delle forze tensoriali ai momenti di quadrupolo dei nuclei pesanti. Viene scelta una particolare interazione, e si riconosce che, finchè sono soddisfatte le condizioni di saturazione, l'introduzione di forze tensoriali non dà luogo a momenti di quadrupolo eccessivi per i nuclei pesanti.

1. — Scopo del presente lavoro è di valutare il contributo che le forze tensoriali possono dare ai momenti di quadrupolo dei nuclei pesanti.

Come è noto i momenti di quadrupolo dei nuclei dispari presentano un andamento oscillante al variare del numero dei nucleoni dispari ed è anzi questa una forte evidenza in favore degli shells ⁽¹⁾. Sovrapposto a questo andamento oscillante si osserva una crescita «in media» (cioè astruendo dalle oscillazioni) molto rapida coll'aumentare del numero dei nucleoni.

È immediato osservare che questa crescita «in media» è notevolmente più rapida di quanto ci si potrebbe attendere se al crescere di A i nuclei si mantenessero simili di forma (sempre «in media» con la specificazione chiarita dianzi). In tal caso i rapporti Q/R^2 tra i momenti di quadrupolo ed i quadrati dei raggi nucleari, crescerebbero all'incirca come il numero totale A dei nucleoni.

⁽¹⁾ W. GORDY: *Phys. Rev.*, **76**, 139 (1949); R. D. HILL: *Phys. Rev.*, **76**, 998 (1949); H. M. FOLEY, W. LOW e C. H. TOWNES: *Phys. Rev.*, **76**, 1415 (1949).

Basta osservare che se si dilata ogni direzione per uno stesso fattore c , i momenti di quadrupolo crescono come c^3 . Infatti, supponendo che la densità delle cariche resti costante, si hanno le seguenti relazioni di proporzionalità:

$$Q \sim \int (3z^2 - r^2) d\Omega \sim \int_0^\pi d\theta \sin \theta (3 \cos^2 \theta - 1) f^5(\theta) \sim c^5,$$

avendo indicato con Ω il volume del nucleo e con $f(\theta)$ una funzione della colatitudine che ne descrive la superficie. Di modo che ne verrebbe

$$Q/R^2 \sim c^3 \sim A.$$

In effetti la densità coulombiana di cariche non resta costante per il crescere del rapporto N/Z ; se ne conclude che i rapporti Q/R^2 crescerebbero un poco meno rapidamente del numero stesso dei nucleoni. Se, volendo astrarre dall'andamento oscillante che è dovuto alla struttura a gusci, si considerano i massimi di tre creste consecutive nella curva che dà Q/R^2 contro A , si trova per As^{75} , $Q = 30 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$, per In^{115} , $Q = 117 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$, per Lu^{175} , $Q = 590 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$. Confrontando As^{75} con In^{115} ed In^{115} con Lu^{175} si vede che mentre in entrambi i casi A aumenta per un fattore $\cong 1,5$, i rapporti Q/R^2 vanno rispettivamente moltiplicati per fattori 3 e 3,9 nel primo e nel secondo caso. Nè d'altronde questi grossi momenti di quadrupolo risultano spiegabili con un modello a shell convenzionale. Il meccanismo del fenomeno si lascia però facilmente esaminare. Nella usuale interpretazione della fissione si considerano solo forze di superficie e forze coulombiane. In questa ipotesi la configurazione sferica è sempre una configurazione di equilibrio, ma da un certo punto in poi, senz'altro al di là degli ultimi nuclei noti, è una configurazione instabile. Si pensi accanto alle forze capillari e coulombiane una perturbazione non più a carattere centrale. In questo caso la configurazione stabile non sarà più quella sferica e si può inoltre prevedere che, avvicinandosi alla soglia di stabilità rispetto a fissione spontanea, la deviazione dalla simmetria sferica deve risultare sempre più spinta. E questo essenzialmente per effetto delle forze di repulsione coulombiane che tendono ad esaltare, sempre più al crescere di A , una eventuale deviazione dalla simmetria sferica prodotta da una perturbazione non centrale per quanto piccola. Nell'ambito di un modello a shell una perturbazione dell'energia totale a carattere non centrale può riferirsi alla tensione centrifuga che si esercita sul nocciolo comprendente i gusci saturi in seguito al moto dei nucleoni esterni. I recenti lavori di RAINWATER e di BOHR ⁽²⁾ hanno indicato come in tal modo possano ottenersi i giusti segni ed ordini di grandezza adeguati per i momenti di quadrupolo.

⁽²⁾ L. J. RAINWATER: *Phys. Rev.*, **79**, 432 (1950); A. BOHR: *Phys. Rev.*, **81**, 134 e 331 (1951).

D'altra parte l'esistenza di forze tensoriali può dare luogo ancora ad una perturbazione non centrale. Le forze tensoriali da sole sono responsabili del momento di quadrupolo del deutone ed il loro effetto al riguardo nei nuclei pesanti non è stato finora studiato, in ipotesi di saturazione. È chiaro che assumendo delle interazioni che non soddisfano le condizioni di saturazione, anzi proprio in seguito al divenire preponderante della parte non centrale, sono da attendersi dei momenti di quadrupolo eccessivi, ove pure non si tenga affatto conto della repulsione coulombiana. Nel caso, ad esempio, di una interazione quale quella a suo tempo suggerita dalla teoria neutrale di Bethe (con taglio nei potenziali a piccole distanze), ciò era stato osservato da VOLKOFF⁽³⁾ appunto trascurando le repulsioni coulombiane. È chiaro dalla precedente discussione come una valutazione del contributo che forze di carattere tensoriale possono dare ai momenti di quadrupolo dei nuclei pesanti, in condizione di saturazione, richiede invece una trattazione accurata degli effetti che sono connessi con il limite di fissione spontanea.

2. - Si è considerata una interazione della forma

$$(1) \quad V(1,2) = \frac{1}{3} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) [(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + \gamma S_{12}] \mathcal{J}(r_{12}),$$

che soddisfa i requisiti di saturazione se $\gamma \leq 1$. Comunque i risultati ottenuti non dovrebbero dipendere notevolmente dalla forma dettagliata della interazione, mentre l'unica cosa da ritenere essenziale è che essa soddisfi ad un certo punto i requisiti di saturazione. Se si studiano i problemi di due corpi a bassa energia l'interazione (1) può sostituirsi con l'interazione

$$(2) \quad V(1,2) = -[1 + \gamma S_{12}] \mathcal{J}(r_{12}).$$

Infatti è facile controllare che (1) e (2) sono effettivamente equivalenti per stati pari di tripletto e di singoletto: non sono equivalenti per stati dispari. D'altra parte nei problemi con due corpi a bassa energia non ci sono ancora stati dispari che risultano sensibili alle forze specificamente nucleari. L'interazione (2) è stata mostrata in accordo con i dati sul deutone a bassa energia (compreso il momento di quadrupolo) da GUINDON⁽⁴⁾.

Per il nucleo si è fatto uso di un modello statistico. In un modello statistico si assumono delle autofunzioni che dentro il nucleo hanno la forma di onde piane e sistematicamente si sostituiscono con integrali estesi alla sfera di Fermi, sommatorie estese a tutti gli stati. Negli stessi limiti in cui è lecito

⁽³⁾ G. M. VOLKOFF: *Phys. Rev.*, **62**, 126 (1942).

⁽⁴⁾ W. B. GUINDON: *Phys. Rev.*, **74**, 145 (1948).

parlare di una densità degli stati nello spazio degli impulsi, si riconosce che questa densità non dipende dalla deformazione del nucleo, che viene fatta a volume costante. Lo stesso vale per il raggio della sfera di Fermi che è determinato solamente dal massimo valore permesso per l'impulso di un singolo nucleone. Limitandosi a considerare quegli stati che vengono a trovarsi volta a volta entro la sfera di Fermi, chiaramente si rinuncia a seguire ogni singolo stato durante la deformazione. Quest'ultimo procedimento darebbe luogo come nel lavoro di PFIRSCH ⁽⁵⁾ ad una « restoring force » troppo grande e non riconducibile ad un effetto di superficie: viceversa, come mostrato da GALLONE e SALVETTI ⁽⁶⁾, si ottiene una « restoring force » riconducibile ad un effetto di superficie se, rinunciando a seguire ogni singolo stato durante la deformazione più correttamente si considerano invece solo quegli stati che conducono alla minima energia totale. È ancora da notare che l'assunzione di un modello statistico risulta rilevante solo per il calcolo della parte centrale del valor medio dell'energia potenziale, dove, in virtù delle condizioni di saturazione, predominano le parti di scambio, che, in un modello a particelle singole, si esprimono mediante « mixed densities », che vanno a loro volta valutate integrando sulla sfera di Fermi. Mentre, nel caso delle forze tensoriali, in cui il contributo predominante, e tanto più in vista di deformazioni, è di tipo diretto, l'assunzione di un modello statistico costituisce semplicemente una ipotesi sulla densità complessiva, che precisamente viene in tal modo ritenuta costante su tutto il nucleo.

In un modello di tipo statistico vengono ignorati i dettagli derivanti dalla struttura a shell dei nuclei ed i momenti di quadrupolo che così si ottengono sono pertanto da riferire alla deformazione prodotta dalle forze tensoriali che sono presenti, mentre, ove si specificassero con più cura le autofunzioni singole, si otterrebbe un momento di quadrupolo per tutti quei nuclei la cui autofunzione, nello stato fondamentale, ancora in assenza di forze tensoriali non risulti a simmetria sferica.

Se Ψ è l'autofunzione del modello, l'energia del nucleo in approssimazione uno ha la forma

$$\mathcal{E} = \mathcal{E} + \mathcal{U} + \mathcal{W} ,$$

con

$$(3) \quad \mathcal{U} = \int \Psi^* \sum_{i > k} V(i, k) \Psi d(1) \dots d(A) + \int \Psi^* \sum_{\substack{i > k \\ (\text{protoni})}} \frac{e^2}{r_{ik}} \Psi d(1) \dots d(A) ,$$

⁽⁵⁾ D. PFIRSCH: *Zeits. f. Phys.*, **132**, 409 (1952).

⁽⁶⁾ S. GALLONE e C. SALVETTI: *Nuovo Cimento*, **10**, 145 (1953).

dove \mathcal{C} è l'energia cinetica, \mathcal{U} è l'energia potenziale, e \mathcal{W} un ulteriore contributo di superficie. Si è aggiunto un ulteriore contributo di superficie essenzialmente perchè è noto che un modello statistico, in cui si assume un potenziale centrale che va bruscamente a zero al contorno, non darebbe un adeguato effetto di superficie ⁽⁷⁾.

Un effetto di superficie è già contenuto nel primo degli integrali in (3) e va collegato al fatto che le particelle vicine al contorno sono attratte solo da una parte e pertanto contribuiscono meno delle altre alla energia di legame. Vi è però un'altra parte dell'effetto di superficie che corrisponde alla diminuzione di energia cinetica ed all'aumento di energia potenziale causati dall'esistenza di una zona periferica del nucleo dove la densità va calando dal suo valore costante all'interno del nucleo al valore nullo fuori. Poichè interessa soprattutto di riprodurre il giusto limite di fissione spontanea, basterà verificare che i due contributi danno luogo alla medesima dipendenza da A e possono venire conglobati in un unico effetto di superficie, la cui entità è nota.

Il calcolo di \mathcal{U} si svolge secondo procedimenti soliti. Per una interazione del tipo (1) il risultato può porsi nella forma

$$(4) \quad \mathcal{U} = \iint d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 F(1, 2) \quad \text{con} \quad F(1, 2) = V_0 + \lambda z^2 V_1,$$

dove V_0 e V_1 dipendono solo da $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, $z = z_1 - z_2$ e λ è una costante; l'integrale è esteso due volte su tutto il volume occupato dal nucleo; V_0 e V_1 sono indipendenti dalla deformazione del nucleo.

3. - Si vuole determinare quella forma del nucleo per cui risulta minima l'energia totale. Se si deforma di poco il nucleo dalla sua forma di equilibrio, sempre mantenendone costante il volume, la corrispondente variazione dell'energia totale, deve, come è chiaro, risultare nulla. Questo principio variazionale dà per euleriana una equazione integro-differenziale, nel modo che viene qui di seguito indicato.

Sia Ω il volume del nucleo. Si assumano coordinate polari, e, per individuare la forma assunta dalla superficie S che racchiude Ω si assegni il modulo del raggio vettore del punto generico di S in funzione della colatitudine θ soltanto (per la simmetria cilindrica). Si indichi con $\psi^2(\theta)$ questa funzione di θ , sempre positiva, e nulla al più in qualche punto. La energia cinetica \mathcal{C} in un modello statistico può venire riguardata come essenzialmente indipendente dalla forma assunta dal volume Ω (a parte quegli effetti di superficie che sono compresi in \mathcal{W}). La condizione che Ω non vari può venire sostituita con l'ana-

⁽⁷⁾ H. A. BETHE e R. F. BACHER: *Rev. Mod. Phys.*, **8**, 82 (1936).

loga condizione che non vari durante la deformazione il valore di $\mathcal{I} = (3\Omega/2\pi)^2$. Sia g un moltiplicatore lagrangiano. Può scriversi il principio variazionale

$$(5) \quad \delta \mathcal{U} + \delta \mathcal{W} - g \delta \mathcal{I} = 0.$$

Posto per brevità

$$(6) \quad \psi(\theta_1) = \psi_1, \quad \psi(\theta_2) = \psi_2, \quad \mu_1 = \cos \theta_2, \quad \mu_2 = \cos \theta_1, \quad A(r_1, r_2; \theta_1, \theta_2) = \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 F(1, 2),$$

si ha

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}[\psi] = \int_{-1}^{+1} d\mu_1 \int_{-1}^{+1} d\mu_2 \int_0^{\psi_1^2} r_1^2 dr_1 \int_0^{\psi_2^2} r_2^2 dr_2 A(r_1, r_2; \theta_1, \theta_2) = \int_{-1}^{+1} d\mu_1 \int_{-1}^{+1} d\mu_2 \mathcal{H}[\psi],$$

dove è chiaro cosa si è voluto indicare con \mathcal{H} . Le variazioni vanno eseguite rispetto alla ψ che però compare nei due argomenti distinti θ_1 e θ_2 : Si ha:

$$\delta \mathcal{U} = \int_{-1}^{+1} d\mu_1 \int_{-1}^{+1} d\mu_2 \left[2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\psi_1^2)} \psi_1 \delta \psi_1 + 2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\psi_2^2)} \psi_2 \delta \psi_2 \right],$$

con

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\psi_1^2)} = \psi_1^4 \int_0^{\psi_2^2} r_2^2 dr_2 A(\psi_1^2, r_2; \theta_1, \theta_2),$$

ed una simile espressione per $\partial \mathcal{H} / \partial (\psi_2^2)$, come si ricava dalla definizione di \mathcal{H} .

Si ottiene così:

$$\delta \mathcal{U} = 2 \int_{-1}^{+1} d\mu_1 \int_{-1}^{+1} d\mu_2 \psi_1^5 \delta \psi_1 \int_0^{\psi_2^2} r_2^2 dr_2 A(\psi_1^2, r_2; \theta_1, \theta_2) + \\ + 2 \int_{-1}^{+1} d\mu_1 \int_{-1}^{+1} d\mu_2 \psi_2^5 \delta \psi_2 \int_0^{\psi_1^2} r_1^2 dr_1 A(r_1, \psi_2^2; \theta_1, \theta_2).$$

Si scambi ora nell'ultimo integrale θ_1 con θ_2 ; quindi si faccia uso della evidente proprietà $A(r_1, r_2; \theta_1, \theta_2) = A(r_2, r_1; \theta_1, \theta_2)$ e si scambino gli argomenti in A ; da ultimo si indichi con r_2 la variabile di integrazione r_1 . In questo modo si riconosce che il secondo integrale è identico al primo e si ha pertanto

$$\delta \mathcal{U} = 4 \int_{-1}^{+1} d\mu_1 \int_{-1}^{+1} d\mu_2 \psi_1^5 \delta \psi_1 \int_0^{\psi_2^2} r_2^2 dr_2 A(\psi_1^2, r_2; \theta_1, \theta_2).$$

Per l'energia di superficie \mathcal{W} si ha:

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}[\psi] = \bar{\gamma} S = 2\pi\bar{\gamma} \int_0^\pi \psi^3 \sin \theta (\psi^2 + 4\dot{\psi}^2)^{1/2} d\theta = 2\pi\bar{\gamma} \int_0^\pi \mathcal{M} d\theta,$$

dove $\bar{\gamma}$ è una costante con le dimensioni di una energia per unità di superficie; si è inoltre convenuto di indicare con puntini le derivazioni rispetto a θ , e per brevità si è indicato con \mathcal{M} l'integrando. Si ricava allora:

$$\delta\mathcal{W} = 2\pi\bar{\gamma} \int_0^\pi d\theta \delta\psi \left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \psi} - \frac{d}{d\theta} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \dot{\psi}} \right],$$

purchè si proceda come di consueto in questi casi e si noti che nella integrazione per parti i termini agli estremi spariscono semplicemente perchè $(\partial \mathcal{M} / \partial \dot{\psi})$ è nullo per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, contenendo a fattore $\sin \theta$.

Eseguito le derivazioni si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \psi} - \frac{d}{d\theta} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \dot{\psi}} &= \\ &= \psi^2 [3 \sin \theta (\psi^2 + 4\dot{\psi}^2)^{1/2} + (\psi^2 \sin \theta - 12\dot{\psi}^2 \sin \theta - 4\psi\ddot{\psi} \sin \theta - 4\psi\dot{\psi} \cos \theta) \cdot \\ &\quad \cdot (\psi^2 + 4\dot{\psi}^2)^{-1/2} + (4\psi^2\dot{\psi}^2 \sin \theta + 16\psi\dot{\psi}^2\ddot{\psi} \sin \theta)(\psi^2 + 4\dot{\psi}^2)^{-3/2}] = \\ &= \psi^2 \mathcal{G}(\theta; \psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi}), \end{aligned}$$

dove con \mathcal{G} si è indicata la quantità tra parentesi quadre. In modo analogo

$$\delta\mathcal{J} = 12 \int_{-1}^{+1} d\mu_1 \int_{-1}^{+1} d\mu_2 \psi_1^5 \psi_2^5 \delta\psi_1.$$

Il principio variazionale (5) può ora scriversi in forma esplicita

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} + \delta\mathcal{W} - g\delta\mathcal{J} &= \int_0^\pi d\theta_1 \delta\psi_1 \psi_1^2 \left[\sin \theta_1 \psi_1^3 \int_0^\pi d\theta_2 \sin \theta_2 \left\{ \int_0^{\psi_2^2} dr_2 A(\psi_1^2 r_2; \theta_1 \theta_2) - 3g\psi_2^6 \right\} + \right. \\ &\quad \left. + (1/2) \pi \bar{\gamma} \mathcal{G}(\theta_1) \right] = 0. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $\delta\psi$ e volendosi soluzioni nulle al più in qualche punto dovrà porsi identicamente uguale a zero per tutti i θ_1 l'espressione tra paren-

tesi quadre. Scrivendo per disteso e ponendo $K=9g$ si ottiene

$$(7) \quad \sin \theta_1 \psi_1^3 \int_0^\pi d\theta_2 \sin \theta_2 \int_0^{\psi_2^2} r_2^2 dr_2 [A(\psi_1^2, r_2; \theta_1, \theta_2) - K] + (1/2) \pi \bar{\gamma} [3 \sin \theta_1 (\psi_1^2 + 4\dot{\psi}_1^2)^{1/2} + \\ + (\psi_1^2 \sin \theta_1 - 12\dot{\psi}_1^2 \sin \theta_1 - 4\psi_1 \dot{\psi}_1 \cos \theta_1 - 4\psi_1 \dot{\psi}_1 \sin \theta_1) (\psi_1^2 + 4\dot{\psi}_1^2)^{-1/2} + \\ + (4\psi_1^2 \dot{\psi}_1^2 \sin \theta_1 + 16\psi_1 \dot{\psi}_1^2 \dot{\psi}_1 \sin \theta_1) (\psi_1^2 + 4\dot{\psi}_1^2)^{-3/2}] = 0.$$

La (7) è una equazione integrodifferenziale per la $\psi(\theta)$. È una equazione non lineare e contiene un parametro K non soggetto finora ad alcuna restrizione. L'unica condizione ai limiti da imporre alla ψ sarà quella di dare un volume Ω finito. La (7) insieme con la condizione ai limiti suddetta, potrà, se si vuole, riguardarsi come un problema ad autovalori, purchè si intendano autovalori del problema quei valori K' del parametro K per cui la (7) ammette soluzioni che soddisfano le condizioni ai limiti. La risoluzione della (7) con metodo perturbativo è brevemente accennata in appendice. È facile mostrare che la soluzione in prima approssimazione ha la forma

$$\psi = R_0^{1/2} + \lambda \alpha_2 P_2(\cos \theta);$$

R_0 essendo il raggio del nucleo e λ una costante. La espressione per α_2 è riportata nell'appendice (18) e ad essa costantemente nel seguito si farà riferimento.

4. - Nel nucleo si considerano N_+ neutroni con spin in sù, N_- neutroni con spin in giù ed analogamente per i protoni. Ci si è limitati al caso di nuclei con $N_+ = N_- + 1$, $Z_+ = Z_-$. Infatti il caso $N_+ = N_-$, $Z_+ = Z_- + 1$ dovrà presentare analogo comportamento; nel caso $N_+ = N_-$, $Z_+ = Z_-$, le forze tensoriali in un modello a particelle singole non danno contributo al valor medio della energia, di modo che non ci si deve attendere alcun momento di quadrupolo; mentre semplicemente non si sono considerati nuclei dispari-dispari. Per aggiustare le costanti che compaiono nella interazione si è proceduto esattamente come in Bethe e Bacher, prendendo cioè come dati standard l'energia di legame ed il raggio dell' Hg^{200} :

$$(8) \quad BE(\text{Hg}^{200}) = 1530 \text{ MeV}, \quad \text{raggio} = 8 \cdot 10^{-13} \text{ cm} = r_0(200)^{1/3}.$$

Si è assunto $\mathcal{J}(r)$ della forma

$$\mathcal{J}(r) = \mathcal{J}_0 \exp[-a(r/r_0)^2].$$

Per aggiustare le costanti \mathcal{J}_0 ed a l'energia totale va presa come somma dell'energia cinetica, dell'energia potenziale, nonchè dell'energia coulombiana e di superficie; espressa in funzione di r_0 deve risultare minima per $r_0 = 1,37 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$,

come dalla (8), ed assumere inoltre per questo valore di r_0 il valore di -1530 MeV. Le costanti \mathcal{J}_0 ed a risultano allora fissate con i seguenti valori

$$\mathcal{J}_0 = 47 \text{ MeV}, \quad a = 0,33.$$

Per calcolare gli integrali che compaiono nella espressione per α_2 si è fatto essenzialmente uso dell'approssimazione consistente nel sostituire i prodotti di esponenziali e « mixed densities », esprimenti forze di scambio, con esponenziali aventi dei range opportunamente accorciati. In tal modo il calcolo di \mathcal{N} e \mathcal{D} che compaiono nella espressione di α_2 può eseguirsi esattamente ed in termini finiti. Per i valori di A che interessano la presente teoria \mathcal{N} e \mathcal{D} sono sostanzialmente dati dalle espressioni

$$(9) \quad \begin{cases} \mathcal{N} = (9/32\pi^2)r_0^{-3} \mathcal{J}_0 \left[- (1/48)a^{-2}A^{-1/3} + (1/96)a^{-3}A^{-1} \right], \\ \mathcal{D} = (9/32\pi^2)r_0^{-7/2} \mathcal{J}_0 \left[- (2/15)(e^2/r_0 \mathcal{J}_0)(Z^2/A^2)A^{1/2} + \right. \\ \left. + \left\{ (16\pi/9)(\bar{\gamma}r_0^2/\mathcal{J}_0) + (3/16)b^{-2} \right\} A^{-1/2} \right], \end{cases}$$

dove b esprime il range delle forze di scambio nel senso della approssimazione dianzi spiegata.

Si può subito osservare come il contributo in \mathcal{D} delle forze nucleari a carattere centrale è dovuto essenzialmente alle forze di scambio (termine in b) ed ha lo stesso andamento di un contributo specificamente di superficie: precisamente va come $A^{-1/2}$ proprio come il contributo di superficie. Questo è dovuto al fatto che queste forze sono a corto range e non è più vero, ad esempio, nel caso di forze coulombiane, che, come si vede nella stessa (9), danno invece un contributo come $A^{1/2}$. I due effetti di superficie possono così venir congelati in uno solo, proporzionale alla superficie, e se ne può specificare l'entità ($u_s A^{2/3}$ con $u_s = 13,1$ MeV). In \mathcal{N} invece compare il contributo delle forze tensoriali, ed i termini preponderanti sono quelli contenenti a , cioè forze dirette, in accordo col fatto che forze tensoriali, da sole, non danno luogo a saturazione. È chiaro che $\alpha_2 = \mathcal{N}/\mathcal{D}$ dovrà divenire infinito al limite di fissione spontanea. Per $\mathcal{D} = 0$ si ottiene infatti:

$$(Z^2/A)_{\text{lim}} = (10/3)(u_s r_0)/e^2,$$

come è noto, e di solito si ricava elementarmente. In questa teoria tale risultato deriva solo dal fatto che le forze centrali sono essenzialmente di scambio ed il loro range viene ridotto in conseguenza, di modo che contribuiscono solo mediante un effetto di superficie. Coi valori che si sono assunti per le costanti il valore limite di Z^2/A risulta $\cong 42$. Il calcolo dei momenti di quadrupolo

può svolgersi elementarmente: $Q = (1/e) \int (3z^2 - r^2) \varrho(\mathbf{r}) d\tau$ dove $\varrho(\mathbf{r})$ è la densità dei protoni e l'integrale è esteso su tutto il nucleo

$$Q \cong (Z/\Omega) (4\pi/5) \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_2(\cos \theta) [R_0^{5/2} + 10 R_0^{3/2} \lambda \alpha_2 P_2(\cos \theta)] = \\ = (16/5) \pi (Z/\Omega) R_0^{3/2} \lambda \alpha_2.$$

Si ottiene così l'espressione

$$(10) \quad Q = \gamma \frac{J_0 r_0^2 (Z/A) (1/20) [-a^{-2} A^{-1/3} + (1/2) a^{-3} A^{-1}]}{[-(2/15)(e^2/r_0)(Z^2/A) + (4/9)u_s]}.$$

Q cresce monotonamente con A fino a divenire infinito al limite di fissione spontanea, tuttavia in tutta la zona dei nuclei stabili si mantiene ancora inferiore ad un valore $\simeq 5\gamma \cdot 10^{-26}$ cm². Si può dunque concludere che, in condizioni di saturazione ($\gamma \leq 1$), non sono da attendersi dei momenti di quadrupolo eccessivi in seguito alla introduzione di forze tensoriali. Il procedimento perturbativo usato per risolvere la (7) può ritenersi giustificato in tutta la zona dei nuclei stabili dal fatto che il rapporto

$$(\lambda \alpha_2 / R_0^{1/2}) = (25/24)(Q/r_0^2) A^{-5/3} < (25/24) 5\gamma A^{-5/3},$$

già per $A = 100$ è dell'ordine 10^{-3} . È pertanto da ritenere giustificato l'aver trascurato gli ordini superiori in λ . È opportuno ancora notare come per $\gamma = 0$ (solo forze centrali) Q risulta nullo dovunque meno che al limite di fissione spontanea dove si annulla il denominatore. Si può anche ottenere una idea sul modo come i momenti di quadrupolo dipendono dal range delle forze tensoriali, poichè nella (10) non compare esplicitamente il range delle forze centrali. Se ϱ è il range delle forze

$$\Delta Q / |Q| \cong 2(\Delta a/a) = -4(\Delta \varrho/\varrho),$$

da cui si vede come aumentando il range, Q aumenta con dipendenza molto sensibile. Più delicata è invece la dipendenza da $(Z^2/A)_{\text{lim}}$ ed una piccola diminuzione nel valore (che qui si è assunto $\cong 42$) di tale limite porta a raddoppiare o triplicare i valori di $|Q|$ per i nuclei più pesanti. Importa però mettere in rilievo che di solito si assumono per $(Z^2/A)_{\text{lim}}$ dei valori maggiori del valore qui assunto (v. FERMI: *Nuclear Physics*, dove si ricava $(Z^2/A)_{\text{lim}} = 45$, GAMOW: *Theory of Atomic Nucleus*, dove $(Z^2/A)_{\text{lim}} = 47,8$).

L'interazione (1) tende dunque per suo conto a dare una forma schiacciata ai nuclei dispari. Si riconosce che in V_0 il termine preponderante è negativo, e corrisponde a forze di scambio attrattive; in $z^2 V_1$ (4) il termine preponde-

rante è positivo ed è proporzionale ad $\mathcal{J} \cos^2 \theta$. La condizione di minimo porterà quindi a preferire nuclei schiacciati, cioè momenti di quadrupolo negativi. Resta da verificare che questo resterebbe vero, per l'interazione (1) ove pure si scegliessero con più cura le autofunzioni individuali. All'energia potenziale \mathcal{U} le forze nucleari contribuiscono con termini centrali, diretti e di scambio, e con termini non centrali diretti e di scambio. Si definiscano

$$\begin{aligned}\lambda_1(N_+) &= \sum_{i=1}^{N_+} |u_i^{(n)}(1)|^2 & \lambda_1(N_-) &= \sum_{i=1}^{N_-} |u_i^{(n)}(1)|^2 \\ \lambda_1(Z_+) &= \sum_{i=1}^{Z_+} |u_i^{(p)}(1)|^2 & \lambda_1(Z_-) &= \sum_{i=1}^{Z_-} |u_i^{(p)}(1)|^2\end{aligned}$$

e analogamente, cambiando l'argomento $\lambda_2(N_+)$, $\lambda_2(N_-)$, $\lambda_2(Z_+)$, $\lambda_2(Z_-)$ essendo $u_i^{(n)}$ la i -esima autofunzione di un certo potenziale centrale relativo ai neutroni ed $u_i^{(p)}$ la i -esima autofunzione di un certo potenziale centrale relativo ai protoni, e può indifferentemente trattarsi di due potenziali uguali o diversi.

Calcolando il primo dei due integrali nella (3) si ricava per il contributo dei termini non centrali diretti:

$$\begin{aligned}(\text{parte non centrale diretta}) &= (1/2) \gamma \iint d(1) d(2) (z^2/r^2) \mathcal{J}(r) \cdot \\ &\cdot [\lambda_1(N_+) \lambda_2(N_+) + \lambda_1(N_-) \lambda_2(N_-) - \lambda_1(N_+) \lambda_2(N_-) - \lambda_1(N_-) \lambda_2(N_+) + \\ &+ \lambda_1(Z_+) \lambda_2(Z_+) + \lambda_1(Z_-) \lambda_2(Z_-) - \lambda_1(Z_+) \lambda_2(Z_-) - \lambda_1(Z_-) \lambda_2(Z_+) + \\ &+ \lambda_2(N_+) \lambda_2(Z_-) + \lambda_1(N_-) \lambda_2(Z_+) + \lambda_1(Z_+) \lambda_2(N_-) + \lambda_1(Z_-) \lambda_2(N_+) - \\ &- \lambda_1(N_+) \lambda_2(Z_+) - \lambda_1(N_-) \lambda_2(Z_-) - \lambda_1(Z_+) \lambda_2(N_+) - \lambda_1(Z_-) \lambda_2(N_-)] .\end{aligned}$$

Se si pone

$$\lambda_1(N_+) = \sum_{i=1}^{N_+} |u_i^{(n)}(1)|^2 + \alpha_1, \quad \lambda_1(Z_+) = \sum_{i=1}^{Z_+} |u_i^{(p)}(1)|^2 + \beta_1,$$

ed analogamente per i λ_2 , si riconosce facilmente che la espressione sopra riportata, assume la forma

$$(1/2) \gamma \iint d(1) d(2) (z^2/r^2) \mathcal{J}(r) (\alpha_1 - \beta_1) (\alpha_2 - \beta_2) .$$

Per nuclei $N_+ = N_- + 1$, $Z_+ = Z_-$ o $Z_+ = Z_- + 1$, $N_+ = N_-$ questa espressione è sempre positiva. Anzi a questo punto importa notare che, ove la parte tensoriale dell'integrazione invece che della forma $(\tau_1 \cdot \tau_2) S_{12} \mathcal{J}(r)$ fosse semplicemente della forma $S_{12} \mathcal{J}(r)$ la precedente espressione andrebbe sostituita dalla seguente

$$- (1/2) \gamma \iint d(1) d(2) (z^2/r^2) \mathcal{J}(r) (\alpha_1 + \beta_1) (\alpha_2 + \beta_2),$$

e varrebbe in tale caso la conclusione opposta.

Desidero ringraziare il prof. BRUNO FERRETTI per il costante interessamento e per le numerose utili discussioni. Ringrazio inoltre il dott. BRUNO TOUSCHEK per una discussione sull'argomento del presente lavoro.

APPENDICE

La principale difficoltà nella risoluzione della (7), nel caso generale, proviene dalla non linearità. È noto d'altra parte che procedimenti perturbativi al primo ordine applicati a problemi non lineari, conducono a problemi lineari. Il termine $\lambda z^2 V_1$ che va aggiunto a V_0 nella espressione (4) di F proviene dalle forze tensoriali. Questo termine può venire considerato come una perturbazione e si può in tal modo sviluppare un calcolo perturbativo al primo ordine, partendo da una approssimazione zero a simmetria sferica. Si supponga dapprima $F = V_0$, cioè $\lambda = 0$. È facile verificare come la (7) dia in questo caso le giuste soluzioni a simmetria sferica e calcolare i valori di K corrispondenti. Posto:

$$V_0(r_{12}) = \sum_l g_l(r_1, r_2) P_l(\cos \theta), \quad (\theta \text{ angolo tra } \mathbf{r}_1 \text{ ed } \mathbf{r}_2)$$

ne segue

$$V_0(r_{12}) = \sum_l g_l(r_1, r_2) \left[P_l(\mu_1) P_l(\mu_2) + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu_1) P_l^m(\mu_2) \cos m(\varphi_1 - \varphi_2) \right],$$

e dalla (6)

$$(11) \quad A(r_1, r_2; \theta_1, \theta_2) = A_0(r_1, r_2; \theta_1, \theta_2) = 4\pi^2 \sum_l g_l(r_1, r_2) P_l(\mu_1) P_l(\mu_2).$$

Per soluzioni a simmetria sferica $\psi^2 = R_0$, cioè $\psi = R_0^{1/2}$, e l'equazione (7) diventa

$$(12) \quad \sin \theta_1 R_0^{3/2} \int_{-1}^{+1} d\mu_2 \int_0^{R_0} r_2^2 dr_2 [A_0(R_0, r_2; \theta_1, \theta_2) - K] + 2\pi \bar{\gamma} R_0^{1/2} \sin \theta_1 = 0.$$

Basterà quindi sostituire per A_0 l'espressione (11) e far uso delle proprietà di ortogonalità delle funzioni sferiche per verificare che la (12) è identicamente soddisfatta per tutti i θ_1 purchè si assuma per K il valore:

$$(13) \quad K_0 = 12\pi^3 R_0^{-3} \int_0^{R_0} r_2^2 dr_2 g_0(R_0, r_2) + 3\pi \bar{\gamma} R_0^{-4}.$$

Nel caso generale il termine $\lambda z^2 V_1$, aggiunto a V_0 , sostituirà, sempre al primo ordine in λ , l'autovalore $K = K_0 + \lambda K_1$ al primitivo autovalore K_0 (13) e l'autofunzione $\psi = R_0^{1/2} + \lambda \varphi$ alla primitiva autofunzione $\psi_0 = R_0^{1/2}$. Se \mathcal{L} è il primo membro della (7) l'equazione $(d\mathcal{L}/d\lambda)_{\lambda=0} = 0$ serve a calcolare φ in approssimazione uno.

L'equazione che così alla fine si ricava è la seguente:

$$\begin{aligned}
 (14) \quad & 3R_0\varphi_1 \int_{-1}^{+1} d\mu_2 \int_0^{R_0} r_2^2 dr_2 [A_0(R_0, r_2; \theta_1, \theta_2) - K_0] + \\
 & + 2R_0^2\varphi_1 \int_{-1}^{+1} d\mu_2 \int_0^{R_0} r_2^2 dr_2 \frac{\partial}{\partial R_0} A_0(R_0, r_2; \theta_1, \theta_2) - 2R_0^4 \int_{-1}^{+1} d\mu_2 \varphi_2 [A_0(R_0, R_0; \theta_1, \theta_2) - K_0] + \\
 & + R_0^{3/2} \int_{-1}^{+1} d\mu_2 \int_0^{R_0} r_2^2 dr_2 [(R_0\mu_1 - r_2\mu_2)^2 A_1(R_0, r_2; \theta_1, \theta_2) - K_1] + \\
 & + 2\pi\bar{\gamma} [\varphi_1 - (\cos \theta_1 / \sin \theta_1) \dot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_1].
 \end{aligned}$$

Si ottiene quindi per l'incognita φ una equazione integro-differenziale lineare. Posto

$$V = \sum_i g_i(r_1, r_2) P_i(\cos \theta), \quad V_1 = \sum_i f_i(r_1, r_2) P_i(\cos \theta),$$

risulta

$$A = A_0 + \lambda z^2 A_1,$$

$$(15) \quad A_0 = 4\pi^2 \sum_i g_i(r_1, r_2) P_i(\mu_1) P_i(\mu_2), \quad A_1 = 4\pi^2 \sum_i f_i(r_1, r_2) P_i(\mu_1) P_i(\mu_2).$$

Le seguenti relazioni definiscano α_n ed η_n

$$(16) \quad \varphi = \sum_n \alpha_n P_n, \quad \varphi - (\cos \theta / \sin \theta) \dot{\varphi} - \ddot{\varphi} = \sum_n \eta_n P_n.$$

Intanto z_0 va posto uguale a zero, se si vuole che la ψ soddisfi la condizione posta di mantenere il volume Ω del nucleo invariato. Infatti:

$$\Omega = (2\pi/3) \int_{-1}^{+1} d\mu \psi^6 - (2\pi/3) \int_{-1}^{+1} d\mu [R_0^3 - 6\lambda\varphi R_0^{5/2}] = \Omega_0 - 8\pi\lambda R_0^{5/2} \alpha_0 \quad (\mu = \cos \theta).$$

È essenziale dimostrare che η_n dipende solo da α_n : Infatti dalla (16)

$$\eta_n = [(2n+1)/2] \int_{-1}^{+1} d\mu P_n [\varphi - (\cos \theta / \sin \theta) \dot{\varphi} - \ddot{\varphi}].$$

Si denotino con apici a destra le derivazioni rispetto a μ

$$\begin{aligned}
 (17) \quad & \eta_n = \alpha_n + [(2n+1)/2] \int_{-1}^{+1} d\mu P_n [2\mu \sum_k \alpha_k P'_k - (1 - \mu^2) \sum_k \alpha_k P''_k] = \\
 & = \alpha_n + [(2n+1)/2] \sum_k \alpha_k \left[2 \int_{-1}^{+1} d\mu \mu P_n P'_k - 2 \int_{-1}^{+1} d\mu \mu P_n P''_k + \int_{-1}^{+1} d\mu (1 - \mu^2) P'_n P'_k \right] = \\
 & = \alpha_n + [(2n+1)/2] \sum_k \alpha_k \int_{-1}^{+1} d\mu P_n P''_k = (1 + n + n^2) \alpha_n,
 \end{aligned}$$

dove si è eseguita una integrazione per parti e si è fatto uso delle relazioni di ortonormalità delle funzioni associate P_n^1 di Legendre. Basterà ora sostituire gli sviluppi (15) e (16) assieme al valore trovato (17) per η_n nella (14); esprimere mediante polinomi di Legendre gli altri termini nella (14) che dipendono da θ_1 e θ_2 ; fare uso delle relazioni di ortonormalità dei polinomi di Legendre; ottenuto così lo sviluppo del primo membro della (14) in serie di polinomi di Legendre, uguagliare a zero i coefficienti. Il sistema di equazioni lineari che così si ottiene ha una matrice dei coefficienti in forma diagonale ed ha la seguente soluzione

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} K_1 &= (4\pi^2/R_0) \int_0^{R_0} r_2^2 dr_2 [(1 + r_2^2/R_0^2)f_0(R_0, r_2) - (2/3)(r_2/R_0)f_1(R_0, r_2)], \\ x_2 &= (\mathcal{N}/\mathcal{D}) \quad \text{con } \mathcal{N} = (2/9)R_0 \int_0^{R_0} r_2^3 dr_2 f_2(R_0, r_2) - (1/15) \int_0^{R_0} r_2^4 dr_2 f_2(R_0, r_2) - \\ &\quad - (1/3)R_0^2 \int_0^{R_0} r_2^2 dr_2 f_0(R_0, r_2), \\ \mathcal{D} &= (1/5)R_0^{3/2}g_2(R_0, R_0) + R_0^{1/2} \int_0^{R_0} r_2^2 dr_2 \frac{\partial}{\partial R_0} g_0(R_0, r_2) + \bar{\gamma}/(2\pi R_0^{3/2}), \end{aligned} \right.$$

$\alpha_n = 0$ per n diverso da zero e diverso da 2.

SUMMARY

The contribution of tensor forces to quadrupole moments of heavy nuclei is evaluated. A particular assumption is made concerning the interaction, and it is found that, as long as saturation conditions are satisfied, the introduction of tensor forces does not give excessive quadrupole moments to heavy nuclei.

Risonanza paramagnetica del solfato doppio di manganese e ammonio.

P. BROVETTO, G. CINI e S. FERRONI

Istituto di Fisica dell'Università, Centro studi di Elettrofisica del C.N.R. - Torino

(ricevuto il 31 Luglio 1953)

Riassunto. — Nel presente lavoro si discutono misure eseguite a temperatura ambiente sul $\text{MnSO}_4(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ mediante il metodo della risonanza paramagnetica. Si sono determinate alcune caratteristiche della cella cristallina e le costanti magnetiche dello ione Mn^{++} . In base a questi risultati si è calcolato la suscettività del sale confrontandola con le misure di KRISHNAN e altri.

1. — Introduzione.

Nel presente lavoro si espongono i risultati delle misure da noi eseguite a temperatura ambiente sullo spettro di risonanza paramagnetica del solfato doppio di manganese ed ammonio ($\text{MnSO}_4(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$) diluito con magnesio nella percentuale del 4 %. Si completano così i dati delle analoghe misure eseguite da B. BLEANEY e D. J. E. INGRAM ⁽¹⁾ a bassa temperatura.

Il livello fondamentale dello ione Mn^{++} corrisponde allo stato $6S_{5/2}$, se il sale è sottoposto all'azione di un campo magnetico costante cui è sovrapposta una componente alternata alla frequenza di 50 Hz, al variare del campo varia la separazione dei sei termini del multipletto di spin.

In queste condizioni è noto come sia possibile rivelare le transizioni, fra le componenti del multipletto, dall'assorbimento di energia in campo elettromagnetico di frequenza opportuna.

⁽¹⁾ B. BLEANEY e D. J. E. INGRAM: *Proc. Roy. Soc., A* **205**, 236 (1951).

2. - Dispositivo sperimentale.

Diamo una breve descrizione dell'apparecchiatura usata (fig. 1): la sorgente di energia a microonde è un Klystron 2K25 la cui potenza viene convogliata mediante una guida d'onda ad un T magico: i due rami simmetrici vanno rispettivamente ad un assorbitore A ed alla cavità risonante C rettangolare, in cui è contenuto il sale in studio, in uno dei rami è inserito un ondometro λ a cavità cilindrica.

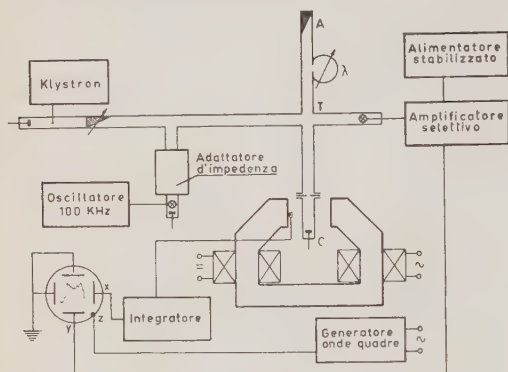


Fig. 1.

per modulare in ampiezza con la frequenza di 100 kHz la potenza del klystron, mediante un diodo 1N23 nel modo usato da altri ricercatori ⁽²⁾. L'amplificazione è realizzata per mezzo di tre stadi selettivi accordati a 100 kHz. Il segnale viene rivelato e inviato all'asse delle Y di un oscillografo; l'amplificazione complessiva è circa 10^7 .

Il magnete è costituito da due avvolgimenti di cui uno alimentato con corrente continua e uno con corrente alternata; la componente continua del campo è tarata mediante una spirale di Lenard. La curva di taratura gauss-ampere così ottenuta, è stata corretta nell'intorno di 3000 gauss con un punto determinato con un errore inferiore all'1% mediante la risonanza paramagnetica del composto ⁽³⁾ $\text{ON}(\text{C}_6\text{H}_4)\text{C}(\text{CH}_3)_2\text{C}(\text{CH}_3)\text{N}(\text{C}_6\text{H}_5)\text{O}$.

In tal modo l'errore nella curva di taratura nell'intorno dei 3000 gauss è certamente inferiore all'1%.

⁽²⁾ A. F. KIP, C. F. DAVIS, L. JENNINGS, D. REINER e R. MALVANO: *Nuovo Cimento*, **8**, 683 (1951).

⁽³⁾ A. N. HOLDEN, C. KITTEL, F. R. MERRIT e W. A. YAGER: *Phys. Rev.*, **75**, 1614 (1949).

Tra le espansioni polari del magnete viene collocata una spirale nella quale il campo alternato induce una forza elettromotrice, proporzionale al campo, che integrata ed amplificata comanda l'asse X dell'oscillografo.

L'assorbimento della radiazione del klystron da parte del sale viene messo in evidenza sullo schermo oscillografico dall'apparizione di picchi, che costituiscono lo spettro di assorbimento. La posizione dei picchi viene determinata riducendo gradualmente la componente alternata, e contemporaneamente variando quella continua, in modo che il picco in esame risulti sempre al centro dello spettro. Annullata in tal modo la componente alternata del campo, si misura la corrente continua che alimenta il magnete e dalla curva di taratura si ricava immediatamente il valore H del campo corrispondente al picco.

3. - Risultati sperimentali.

Il solfato doppio di ammonio e manganese cristallizza nel sistema monoclino, classe prismatica. Il piano formato dagli assi a , c (fig. 2) è il piano di simmetria, l'asse b corrisponde all'asse binario, l'angolo degli assi a , c è di 105° . Nella cella elementare esistono due ioni Mn^{++} equivalenti, circondati da un ottaedro di molecole d'acqua non equidistanti dallo ione; infatti l'ottaedro è lievemente deformato in una bipiramide il cui asse quaternario corrisponde all'asse magnetico dello ione. Gli assi magnetici z , z' sono egualmente inclinati di un angolo α sul piano (ac) ; l'intersezione del piano (ac) col piano (zz') corrisponde all'asse di suscettività K_1 . L'asse K_1 forma un angolo ψ coll'asse c , l'asse di suscettività K_2 è normale a K_1 , l'asse K_3 coincide con b .

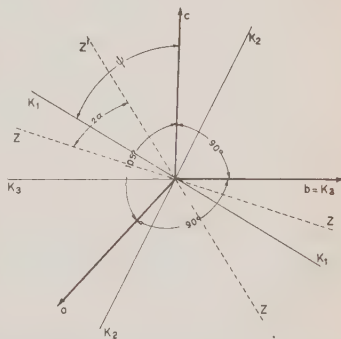


Fig. 2.

Per studiare la struttura dello spettro in relazione alla mutua orientazione fra campo magnetico e assi cristallografici, il cristallo è fissato all'estremità di una asticciola di plexiglas situata lungo l'asse della cavità e comandata dall'esterno in modo da poter ruotare il cristallo nel piano normale all'asticciola.

Il cristallo è stato montato dapprima coll'asse b parallelo all'asticciola (in tal modo il campo magnetico ruota nel piano degli assi a , c). La fig. 3 rappresenta la variazione della larghezza dello spettro (ossia la separazione in gauss fra il primo e l'ultimo picco) al ruotare del campo magnetico nel piano $(K_1 K_2)$. Come risulta dalla figura la larghezza dello spettro presenta quattro massimi distanti 90° , a due a due eguali tra loro. Il cristallo è stato poi montato in modo che il campo ruoti nel piano formato dalla direzione dei massimi

di minore ampiezza di fig. 3 e dall'asse K_3 : si è ottenuto per la larghezza dello spettro, il grafico di fig. 4. Sono evidenti quattro massimi eguali separati alternativamente da 61° e 119° . Dalla teoria cui accenneremo in seguito risulterà che il grafico di fig. 4 corrisponde alla rotazione del campo magnetico nel piano ($K_1 K_3$).

In fig. 5 è riportato il fotogramma dello spettro quando il campo magne-

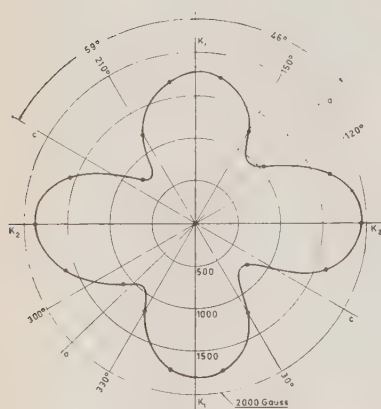


Fig. 3.

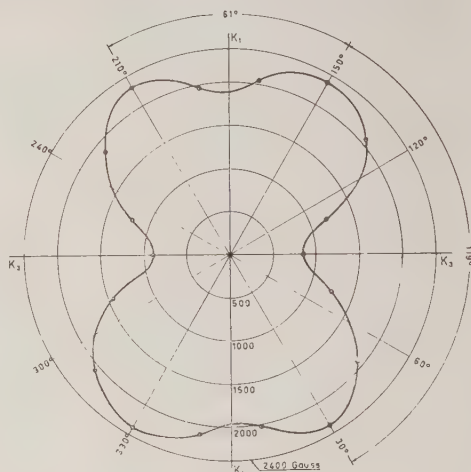


Fig. 4.

tico è nella direzione K_2 di fig. 3; in fig. 6 analogamente è riportato lo spettro quando il campo è in una delle due direzioni di massima larghezza di fig. 4. Nelle tabelle I e II sono riportati i valori delle posizioni dei picchi, in corri-

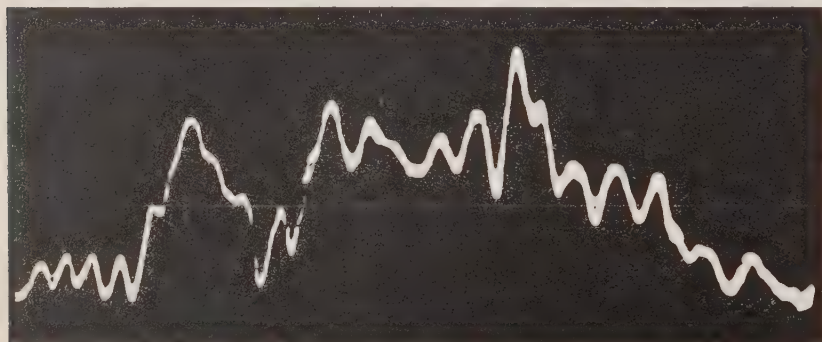


Fig. 5.

spondenza ai fotogrammi di fig. 5 e 6: la frequenza della radiazione emessa dal klystron è circa 9430 MHz.

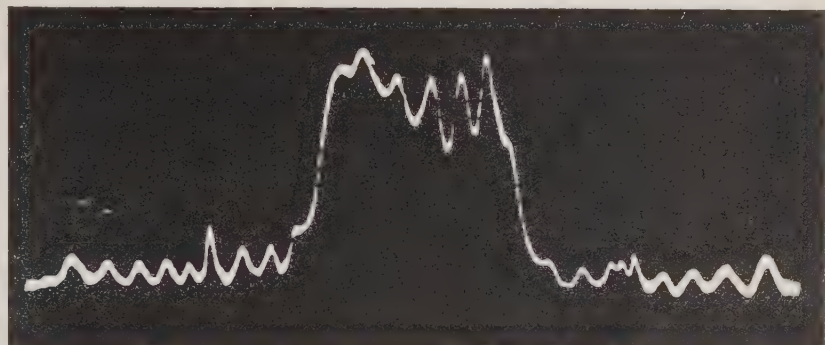


Fig. 6.

TABELLA I.

2320	2424	2534	2631	2746	2810	2860	2872	2929
2985	3034	3085	3127	3182	3292	3328	3382	3448
3505	3541	3650	3707	3852	3945	4032	4127	4232

TABELLA II.

2157	2256	2354	2454	2553	2663	2772	2866	2977	2996	3103
3163	3181	3236	3284	3334	3376	3447	3483	3552	3592	3650
3737	3805	3840	3885	3955	4000	4095	4180	4276	4370	4473

4. - Teoria del fenomeno.

Il comportamento, nel reticolo cristallino, dello ione Mn^{2+} in presenza di campo magnetico esterno, può essere descritto mediante l'hamiltoniana ⁽⁴⁾:

$$(1) \quad \mathcal{H} = g\beta H \cdot S + D \left[S_z^2 - \frac{1}{3} S(S+1) \right] + E(S_x^2 - S_y^2) + \\ + AS_z \cdot I_z + B(S_x \cdot I_x + S_y \cdot I_y) + Q \left[I_z^2 - \frac{1}{3} I(I+1) \right],$$

⁽⁴⁾ A. ABRAGAM e M. H. L. PRYCE: *Proc. Roy. Soc.*, A **205**, 135 (1951).

in cui S è l'operatore di spin elettronico, I quello di spin del nucleo, g è il fattore spettroscopico di separazione, β è il magnetone di Bohr, D, E, A, B, Q sono delle costanti che determineremo sperimentalmente.

Il primo termine rappresenta l'interazione col campo magnetico esterno, mentre il secondo e il terzo termine, quadratici nello spin, separano parzialmente i livelli di spin elettronico in assenza di campo magnetico.

Gli assi x, y, z , formano una terna ortogonale, l'asse z è l'asse magnetico dello ione, gli assi x, z individuano un piano, coincidente con $(K_1 K_3)$.

I termini della seconda riga rappresentano l'interazione del nucleo cogli elettroni; precisamente i primi due termini corrispondono all'accoppiamento fra lo spin del nucleo, e lo spin elettronico, il terzo termine rappresenta l'interazione del quadrupolo nucleare col campo elettrico degli elettroni. È trascurabile l'interazione diretta tra il campo esterno e il momento magnetico del nucleo.

Il livello fondamentale dello ione Mn^{++} ha molteplicità 6 per lo spin elettronico e 6 per lo spin del nucleo; la funzione d'onda che descrive lo stato del sistema può essere decomposta in due fattori indipendenti, corrispondenti rispettivamente allo spin elettronico e nucleare. Supponiamo che il termine principale dell'hamiltoniana (1) sia quello dipendente dal campo magnetico e che gli altri termini ne costituiscano una perturbazione.

Eseguendo sotto queste ipotesi il calcolo fino alla seconda approssimazione, si ricavano le posizioni delle righe spettrali di assorbimento ⁽⁵⁾, definite mediante i valori del campo magnetico:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad H = & \frac{\hbar\nu}{g\beta} - \frac{2M+1}{2g\beta} [D(3\cos^2\theta - 1) + 3E\cos 2\varphi \sin^2\theta] - \frac{1}{2H_0(g\beta)^2} \cdot \\
 & \cdot [(D - E\cos 2\varphi)^2 \sin^2\theta \cos^2\theta - E^2 \sin^2\theta \sin^2 2\varphi] [24M(M+1) - 4S(S+1) + 9] - \\
 & - \frac{1}{8H_0(g\beta)^2} \{ [D\sin^2\theta + E\cos 2\varphi(1 + \cos^2\theta)]^2 - 4E^2 \cos^2\theta \sin^2 2\varphi \} \cdot \\
 & \cdot [2S(S+1) - 6M(M+1) - 3] - \frac{Km}{g\beta} - \frac{B^2}{4(g\beta)^2 H_0} - \frac{A^2 + K^2}{K^2} [I(I+1) - m^2] - \\
 & - \frac{B^2}{2(g\beta)^2 H_0} \frac{A}{K} m(2M+1) - \frac{1}{2(g\beta)^2 H_0} \left(\frac{A^2 - B^2}{K} \right)^2 \sin^2\theta \cos^2\theta m^2 - \\
 & \frac{Q^2 \cos^2\theta \sin^2\theta}{2g\beta K M(M+1)} \left(\frac{AB}{K^2} \right)^2 m [4I(I+1) - 8m^2 - 1] + \\
 & + \frac{Q^2}{8K g\beta M(M+1)} \left(\frac{B}{K} \right)^4 m [2I(I+1) - 2m^2 - 1],
 \end{aligned}$$

⁽⁵⁾ La formula (2) per $E = 0$ si riduce a quella data da B. BLEANEY: *Phil. Mag.*, **42**, 441 (1951).

dove $K^2 = A^2 \cos^2 \theta + B^2 \sin^2 \theta$ e $-S \leq M \leq S$; $-I \leq m \leq I$. In essa θ è l'angolo fra il campo magnetico e l'asse z , φ l'angolo fra la proiezione del campo sul piano normale a z e l'asse x , ν la frequenza della radiazione emessa dal klystron. M ed m sono rispettivamente le componenti di S e di I lungo l'asse di quantizzazione. H_0 è il valore del campo corrispondente al centro dello spettro. Le posizioni delle linee spettrali date nella (2) corrispondono alle transizioni permesse $(M, m) \rightarrow (M+1, m)$.

I primi quattro termini rappresentano le 5 transizioni fra le componenti del multipletto di spin elettronico (struttura fine), i rimanenti termini risolvono ciascuna delle linee di struttura fine in un gruppo di sei picchi corrispondenti ai sei termini del multipletto di spin nucleare (struttura iperfine).

5. - Conclusioni.

Per determinare le costanti D ed E mediante i risultati sperimentali, calcoliamo in funzione di esse la differenza ΔH , fra le linee di struttura fine corrispondenti alle transizioni $(3/2 \rightarrow 5/2)$ e $(-5/2 \rightarrow -3/2)$ date dalla (2), e confrontiamola coi risultati sperimentali di fig. 2 e 3.

Dalla (2) si ottiene immediatamente:

$$(3) \quad \Delta H = |H_{3/2 \rightarrow 5/2} - H_{-5/2 \rightarrow -3/2}| = 4 |D(3 \cos^2 \theta - 1) + 3E \cos 2\varphi \sin^2 \theta|,$$

in cui D ed E saranno misurate in gauss, essendosi ommesso il fattore $1/g\beta$ a secondo membro della (3). Dalla (3) appare evidente che la larghezza dello spettro non dipende dai termini di seconda approssimazione.

Consideriamo il caso in cui il campo magnetico giace nel piano $(K_1 K_2)$: indichiamo con ε l'angolo fra il campo magnetico e l'asse K_1 : Esprimendo θ e φ in funzione di ε si vede subito dalla (3) che ΔH presenta quattro massimi, a due a due eguali, per i valori $\varepsilon = 0, \pi$; $\varepsilon = \pi/2, 3\pi/2$ corrispondenti rispettivamente alle direzioni $K_1 K_2$. In questo caso gli spettri dei due ioni presenti nella cella sono eguali. Nel piano $K_1 K_3$, invece, gli spettri dei due ioni si separano; dalla (3), per $\varphi = 0$, risulta infatti che l'ampiezza ΔH dello spettro complessivo dei due ioni presenta quattro massimi non equidistanti corrispondenti alle direzioni z, z' .

In fig. 3, dove è rappresentata l'ampiezza dello spettro in funzione dell'orientamento di H nel piano $(K_1 K_2)$, appaiono evidenti i quattro massimi equidistanti. La fig. 4, che è stata ottenuta ruotando il cristallo in modo che il campo magnetico giaccia nel piano individuato da K_3 e dalla direzione del massimo di fig. 3 che forma l'angolo $\psi = 59^\circ$ coll'asse c , presenta le caratteristiche previste per la rotazione del campo magnetico nel piano $(K_1 K_3)$. Se ne deduce pertanto che l'angolo fra l'asse c e l'asse K_1 , è appunto di 59° .

Inoltre dalla fig. 4 si vede immediatamente che $\alpha = 30,5^\circ$. I presenti risultati ottenuti con l'errore massimo di 1° sono in buon accordo con quelli di BLEANEY e INGRAM ⁽¹⁾.

Dai dati di fig. 3 e 4, facendo uso della (3) e tenendo conto del contributo allo spettro della struttura iperfine, si ricava: $D| = 236$ gauss, $|E| = 44$ gauss, i segni delle due costanti sono uguali; risulta che non è possibile colle sole misure di risonanza paramagnetica determinare questi segni.

Si conclude pertanto che la costante $D|$ da noi determinata a temperatura ambiente si accorda con i dati di BLEANEY e INGRAM ⁽¹⁾, mentre la costante E' a questa temperatura è notevolmente inferiore a quanto lasciano prevedere i dati di questi autori.

Per quanto riguarda la struttura iperfine dai valori riportati nelle tabelle I e II si è ottenuto, mediante la formula (3): $A = -100$, $B = -104$.

Alla temperatura a cui si è eseguita l'esperienza il potere risolutivo piuttosto basso non consente una grande precisione in queste determinazioni; non si può pertanto ricavare la costante Q , dipendente dall'interazione degli elettroni col quadripolo nucleare.

È interessante calcolare la suscettività magnetica χ del sale in base ai dati ottenuti per le costanti di struttura fine.

Usando il metodo statistico della *grande funzione* di partizione $\Xi(\lambda)$ di FOWLER ⁽⁶⁾, la suscettività risulta definita dalle formule:

$$(4) \quad \chi = \frac{kT}{H} \frac{\partial \log \Xi}{\partial H},$$

$$(5) \quad N = \lambda \frac{\partial \log \Xi}{\partial \lambda},$$

dove N è il numero di Avogadro. Eliminando dalle (4) e (5) il parametro di distribuzione λ e considerando soltanto i termini lineari in D/kT ed E/kT , si ottiene la seguente formula approssimata, valida per temperature abbastanza lontane dallo zero assoluto:

$$(6) \quad \chi(\theta, \varphi) = \frac{Ng^2\beta^2}{5kT} S(S+1) \left[1 - \frac{D(3 \cos^2 \theta - 1) + 3E \cos 2\varphi \sin^2 \theta}{30kT} - (2S+3)(2S-1) \right],$$

in cui k è la costante di Boltzmann.

Dalla (6) si ottiene per la suscettività lungo i tre assi K_1 , K_2 , K_3 , alla

⁽⁶⁾ R. H. FOWLER: *Proc. Cam. Phil. Soc.*, **34**, 382 (1938).

temperatura di 303 °K:

$$(7) \quad \begin{cases} \chi_1 = 1,443 \cdot 10^{-2} (1 - 1,53 \cdot 10^{-4}), \\ \chi_2 = 1,443 \cdot 10^{-2} (1 + 1,74 \cdot 10^{-4}), \\ \chi_3 = 1,443 \cdot 10^{-2} (1 - 0,21 \cdot 10^{-4}). \end{cases}$$

Nelle (7) si è scelto positivo il segno della D .

KRISHNAN, MOOKHERJI, BOSE (?), hanno determinato sperimentalmente a 303 °K e ad altre temperature la differenza fra le suscettività lungo i tre assi, e l'angolo fra la direzione di maggiore suscettività e l'asse c . Secondo le misure di questi autori gli assi di suscettività nel piano (ac) formano gli angoli di 16° e 74° con c , mentre secondo le nostre misure gli angoli fra K_2 , K_1 e c sono rispettivamente 31° e 59°. Poichè, nelle notazioni di KRISHNAN *et al.* l'asse che forma l'angolo di 16° con c è indicato con K_1 , è naturale identificare, d'accordo con BLEANEY, la direzione K_1 di KRISHNAN con la K_2 del presente lavoro, nonostante i notevoli scarti che si riscontrano in questi valori. Essi sono da attribuirsi alla scarsa precisione raggiungibile nelle misure eseguite coi metodi classici. Secondo i dati di KRISHNAN *et al.* la direzione di maggiore suscettività corrisponde a K_1 , di conseguenza nelle nostre notazioni la direzione di maggiore suscettività deve coincidere con K_2 , ciò giustifica la scelta positiva del segno della costante D .

Confrontiamo i risultati della (7) con quelli di KRISHNAN *et al.* (?), esprimendoli mediante le nostre notazioni:

TABELLA III.

$\Delta\chi$	Presente lavoro	KRISHNAN e altri
$\chi_2 - \chi_1$	$4,72 \cdot 10^{-6}$	$8,7 \cdot 10^{-6}$
$\chi_2 - \chi_3$	$2,81 \cdot 10^{-6}$	$6,0 \cdot 10^{-6}$
$\chi_3 - \chi_1$	$1,90 \cdot 10^{-6}$	$2,7 \cdot 10^{-6}$

I dati sono espressi in unità C.G.S.e.m. e si riferiscono alla temperatura di 303 °K.

Risulta dalla tabella III, che gli scarti tra i dati ottenuti col metodo della risonanza paramagnetica e quelli ottenuti col metodo classico sono notevoli (circa il 100%). Questo probabilmente dipende dal fatto che, come si vede dalle (6) e (7), i termini dipendenti dalle costanti D ed E a temperatura ordinaria non influiscono sulla suscettività che con termini dell'ordine di 10^{-4} ,

(?) K. S. KRISHNAN, A. MOOKHERJI e A. BOSE: *Phil. Trans.*, A **238**, 125 (1939).

mentre mediante il metodo della risonanza paramagnetica l'effetto di tali termini è più diretto e non danneggiato dalla temperatura.

Si può pertanto concludere che i presenti risultati sono da ritenersi più attendibili di quelli ottenuti coi metodi classici.

Questo lavoro è stato eseguito al Centro Studi per l'Elettrofisica. Ringraziamo il prof. DEAGLIO per il costante incitamento ed aiuto e la dott. GARELLI per le utili discussioni. I cristalli sono stati preparati all'Istituto di Chimica dal dott. BORELLO che ringraziamo vivamente. Ringraziamo inoltre il prof. FENOGLIO che ci ha reso possibili le misure cristallografiche.

SUMMARY

The properties of the paramagnetic salt $\text{MnSO}_4(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ diluted with the corresponding Mg salt in the ratio roughly of Mn: Mg = 4:1000 have been investigated by the resonance method, at room temperature. Fine and hyperfine structures are satisfactorily resolved (2000 gauss for particular orientations of the crystal in the magnetic field). In these conditions we are able to assign to the constants appearing in the hamiltonian form of the problem the following values: $D = 236$ gauss, $E = 44$ gauss, $A = -100$ gauss, $B = -104$ gauss. Having calculated the susceptibility with the usual statistical method, with terms containing D and E , we are able to compare our results with those obtained by KRISHNAN, MOOKHERJI, BOSE at the same temperature by means of classical measurements of susceptibility (see Table III). We think that a higher degree of precision is obtainable with the resonance method, consequently our values seem to be more reliable.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

On the Theory of the Spark Counter.

F. BELLA and C. FRANZINETTI

Istituto di Fisica dell'Università - Roma

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Roma

(ricevuto il 23 Luglio 1953)

The behaviour of a spark counter, which has been described in several papers by different authors ^(1, 2, 3, 4); can be explained using MEEK's ⁽⁵⁾ theory of the mechanism of the spark.

Let us suppose that a single electron is freed in the gap between two parallel plane electrodes containing a gas at a certain pressure. If a suitable difference of potential V is applied to the two electrodes, the electron will start moving toward the anode creating ion pairs at the average rate of α per cm. While the electrons advance the positive ions, owing to the very low mobility compared with that of the electrons, will remain behind. They will form a column of positive charges, having a conical shape owing to the lateral spread of the avalanche as it advances. After a path z the average number of electrons created will be $e^{\alpha z}$ and, as the positive ions are just as many as the electrons but do not advance with them, the ionic den-

sity at the top of the avalanche will be ⁽⁵⁾

$$N = \frac{\alpha e^{\alpha z}}{\pi r^2},$$

if r is the average radial spread of the avalanche. Therefore the electric field due to this positive space charge is

$$E_s = \frac{4}{3r} \varepsilon \alpha e^{\alpha z},$$

where ε is the electronic charge. According to MEEK, this «space charge develops toward the cathode as a self propagating positive space charge streamer» when

$$(1) \quad E_s = k E_0,$$

where E_0 is the externally applied field across the gap and k is a constant, the value of which, for air, lies in the range

$$0.1 \leq k < 1.$$

⁽¹⁾ F. BELLA, C. FRANZINETTI and D. W. LEE; *Nuovo Cimento*, **10**, 1324, (1953).

⁽²⁾ J. W. KEUFFELL; *Rev. Sci. Instr.*, **20**, 202, (1949).

⁽³⁾ R. W. PIDD and L. MADANSKY; *Phys. Rev.*, **75**, 1175, (1949).

⁽⁴⁾ E. ROBINSON; *Proc. Phys. Soc. A*, **66**, 73, (1953).

Let us consider now a spark counter, (schematically indicated in fig. 1). If an ionizing particle crosses the counter, it

⁽⁵⁾ L. B. LOEB and J. M. MEEK; *The Mechanism of the Electric Spark* (Stanford, Chap. II.

will create ν pairs of ions within certain intervals a spark, is

$$z_1, z_1 + dz_1; \quad z_2, z_2 - dz_2, \dots z_p, z_p - dz_p;$$

their frequency distribution follows Poisson's law. Each of these electrons has a probability F of developing an avalanche which will satisfy Meek's condition (1) before hitting the anode. The formation of an electron avalanche is a process in which one electron, as it advances, is converted in two, each of which behaves in similar manner, and so on. This is a « Furry process » and the probability that after a certain distance z the number of the electrons created by the avalanche is $> n$, is

$$F = (1 - e^{-\alpha z})^{n-1},$$

which is practically

$$F = (1 - e^{-\alpha z})^n,$$

as $n \gg 1$ in our case. If n is the total number of electrons in the avalanche after a distance z from its starting point, the number of pairs created in the layer between z and $z + dz$ is

$$dn = \alpha \cdot n \cdot dz$$

and the ion density

$$N \sim \frac{\alpha n}{\pi r^2}.$$

or

$$h = \frac{\pi r^2 N}{\alpha} = A \frac{V}{\alpha} \quad \left(A = \frac{3Kr}{4\epsilon\phi} \right).$$

if Meek's criterion is to be satisfied.

Assuming that each primary ion pair can create an avalanche independently of the others, the probability that: a) the primary ionizing particle creates ν primary ion pairs in the gap, and that b) at least one of these produce

$$P_\nu(V) = \frac{e^{\nu\delta}}{\nu!} (\bar{\nu}\delta)^\nu [1 - (1 - \tau/\delta)_0]$$

$$J/\delta = \int_0^1 (1 - e^{-\alpha\delta\eta})^n d\eta,$$

$\delta\bar{\nu}$ being the average number of ion pairs created within the gap. Summing over all possible values of ν

$$(2) \quad R(V) = \sum_0^\infty P_\nu(V) = 1 - e^{-\bar{\nu}\tau(V)}.$$

$J(V)$ is very well approximated by the function

$$J(V) = \frac{1}{\alpha} [-Ei(-\lambda)] - \frac{e^{-\lambda}}{2n\alpha} \varphi_0(\alpha\delta),$$

$$\varphi_0(\alpha\delta) = 1 - \frac{e^{-\alpha\delta}}{6} - \frac{e^{-2\alpha\delta}}{12},$$

$$\lambda = -n \ln(1 - e^{-\alpha\delta}) \sim ne^{-\alpha\delta}.$$

So, with a good approximation we can put

$$(2') \quad R(V) = (1 - \exp[-(\bar{\nu}/\alpha)(-Ei(-\lambda))])^r,$$

R represents the efficiency of the counter. It must be pointed out that $\bar{\nu}\delta$ is the average number of ions created by the

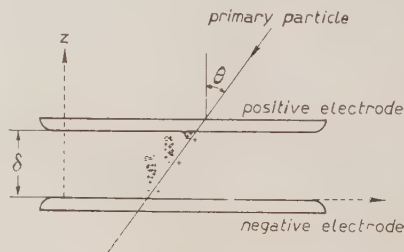


Fig. 1.

incident particle in the gap. This value depends on the angle θ (see fig. 1) between the direction of the particle and the perpendicular to the plane of the counter.

If $\bar{v}_0\delta$ is the average number of ions created by a particle incident perpendicularly to the plane of the counter, we have evidently

$$v = v_0 \cos \theta$$

and so

$$(2'') \quad R(V, \theta) = 1 - \exp [-(\bar{v}_0/\alpha \cos \theta)(-Ei(-\lambda))].$$

Integrating this formula over all possible angles, for an isotropic distribution of particles, we get

$$(3) \quad R(V) = 1 - e^{-a} + a \cdot (-Ei(-a)), \\ (a = (\bar{v}_0/\alpha) Ei(-\lambda))$$

In order to make any use of this formula we should know the value of the parameters involved: k , r , α . We know the order of magnitude of r : we can take k for Argon to be of the same order of magnitude as that determined for air, as the results are not very sensitive to changes of k . On the other hand, they are quite sensitive to changes of α and α

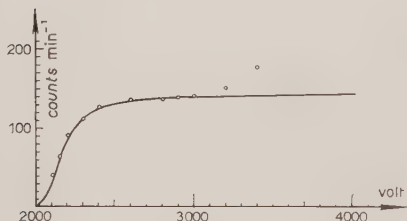


Fig. 2.

is not known for mixtures of alcohol and argon such as that with which we are dealing. In order to make a comparison with the experiments we have made the tentative assumption that α is represented, in the interval of voltages with which we are concerned, by the well known classical formula

$$\alpha = \alpha_0 \exp [-B/V],$$

B and α_0 are constants, dependent on the pressure. We take $k = 0.1$ and $r = 10^{-2}$ cm, and choose α_0 and B to fit two of the experimental points. The resulting curve, obtained from equa-

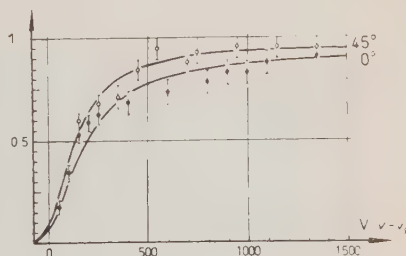


Fig. 3.

tion (3) is plotted in fig. 2. The agreement with the experimental points, concerning a 10.35 cm^2 counter, is surprisingly good. Each of the experimental points represents $\sim 10^6$ counts⁽⁶⁾. Equation (2'') is plotted for two different values of θ ($\theta = 0^\circ$ and $\theta = 45^\circ$) and is compared in fig. 3 with the experiments. The black points refer to inclinations of $\theta = 0^\circ$ and the others of $\theta = 45^\circ$.

Owing to the large number of parameters which are unknown or known only as an order of magnitude, all we can claim is that the theory is consistent with the experiments, but we cannot give any definite proof.

On the other hand, irrespective of the assumptions, the behaviour of this type of counter is phenomenologically described by equations (2) and (3).

A more detailed account of this work will soon appear in *Il Nuovo Cimento*.

(⁶) Since the rise of the experimental curve at the end of the plateau is probably due to spurious causes, it is not surprising that the theory fails to explain it.

On Spark Counters.

F. BELLA, C. FRANZINETTI and D. W. LEE

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Roma
Istituto di Fisica dell'Università - Roma

(ricevuto il 23 Luglio 1953)

Several attempts ^(1,2,3) have recently been made to produce spark counters which could be employed in experimental work in cosmic rays and nuclear physics. The main use of this type of counter is in the measurements of very short time intervals (of the order of 10^{-9} s).

It appears to be generally believed that these counters suffer from various disadvantages - difficulty in construction, short life and the need for a long external quenching pulse. The work described below was undertaken in order to determine how serious these disadvantages were and whether any useful application could be made of these counters.

The counters we have made are similar to those described in the references given above. They are made of two parallel metal plates, separated by about two mm and enclosed in a pyrex envelope. They have been filled with various different mixtures; the best results were obtained with Argon and Alcohol in the

following proportions:

Argon at 34 cm Hg,
 Alcohol at 4 cm Hg.

In fig. 1 we give a typical example of the characteristic curve of a $10 \cdot 2.8 \text{ cm}^2$ counter. The curve was obtained with a

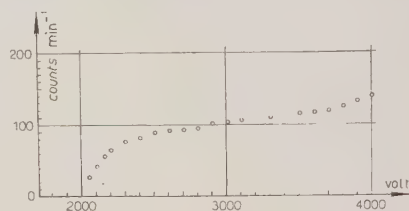


Fig. 1.

quenching pulse of $5 \cdot 10^{-3}$ s. Each point represents about 10^4 counts. It will be seen that the plateau is about 800 to 900 V. With a quenching time of 10^{-4} s the plateau is reduced to 600-700 V and for quenching times much shorter than this it disappears altogether.

At present the most important features of our counter can be summarized as follows:

a) they have a time resolution of

⁽¹⁾ J. W. KEUFFEL; *Rev. Sci. Instr.*, **20**, 202, (1949).

⁽²⁾ R. W. FIDD and L. MADANSKY; *Phys. Rev.*, **75**, 1175, (1949).

⁽³⁾ E. ROBINSON; *Proc. Phys. Soc.*, A **66**, 73, (1953).

10^{-9} s and it is possible that this can be improved;

b) the position of a point on the track of an ionizing particle can be localized to 1 mm^3 ;

c) the output pulse is of several hundred volts;

h) by suitably adjusting the product $p\delta$ (pressure of the mixture \times distance between the electrodes) one can obtain, for a particle of given ionizing power, an efficiency which depends strongly on the direction of incidence;

i) the life of these counters ap-

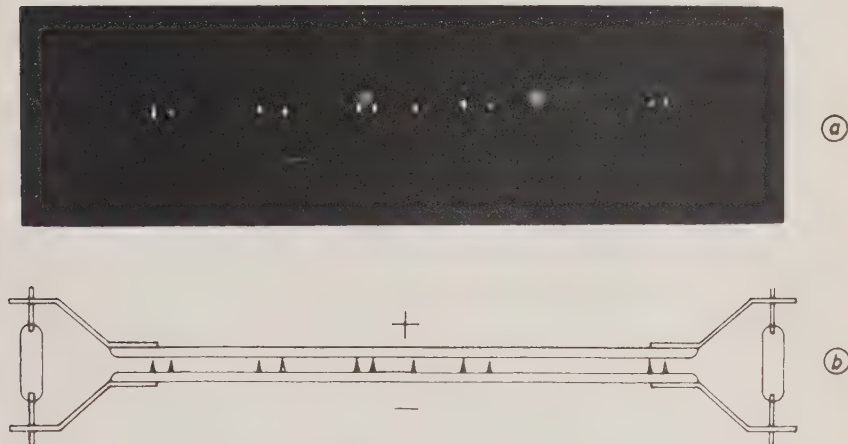


Fig. 2. - a) Photograph of sparks from a counter.

b) Corresponding sketch of the experimental arrangement.

d) they have a plateau of about 1000 volt;

e) considerable care is needed in construction, particularly in polishing of the plane surfaces;

f) to obtain a plateau of 1000 V they need a quenching pulse of a few milliseconds; but as a plateau of about 500 V is usually more than sufficient, they can be used with a quenching time of 10^{-4} s. The capacity of the counter, to which fig. 1 refers, is of the order of $\sim 20 \text{ pF}$, thus a series resistance of $5 \text{ M}\Omega$ is sufficient;

g) they are temperature sensitive and can only be used in the range -10°C to $+40^\circ\text{C}$;

pears to be rather longer than that found by other workers. The oldest of our counters, made more than a year ago, has worked continuously for six months and is still working efficiently. Others made more recently, have so far yielded about $5 \cdot 10^6$ counts. We are not, therefore, yet in a position to estimate any-



Fig. 3.

thing other than a lower limit of the life of these counters.

Fig. 2 shows the definition in space which can be obtained with these counters. A better arrangement is that

sketched in fig. 3. One of the electrodes is semitransparent; thus a single photograph is sufficient to define the point of intersection of a track with the cathode surface. We have made a counter of this type: the sparks were clearly visible.

The following conclusions can be drawn from the results which we have

obtained: it appears that the spark counters can be used for experiments in cosmic rays and nuclear physics; they are particularly valuable when good definition in both time and space is required.

A more detailed account of this work has been submitted for publication in *Il Nuovo Cimento*.

Autoradiografia dell'aerosol atmosferico.

E. MORASCHINELLI

Istituto di Fisica dell'Università - Pavia

(ricevuto il 27 Luglio 1953)

Le sostanze radioattive contenute nell'aria, prodotte dalla disintegrazione delle emanazioni di radio e di torio, si trovano, in parte, ancorate alle particelle solide che costituiscono l'aerosol atmosferico.

Non è ben chiaro come avvenga questo fenomeno di ancoraggio; probabilmente sono responsabili di esso forze di natura elettrica, dovute al fatto che alcuni elementi radioattivi si trovano nell'aria sotto forma di ioni. Questo avviene quando l'elemento che ha dato loro origine si è disintegrato con l'emissione di una particella α .

Qualche autore ritiene che anche la emanazione di radio (Rn), si trovi in parte adsorbita dalle stesse particelle che portano i suoi prodotti di disintegrazione. Sebbene questa ipotesi sembri da scartare anche in base a misure eseguite recentemente ⁽¹⁾, rimane molto da chiarire circa il processo di ancoraggio. Particolarmente interessante è il poter stabilire se gli elementi successivi delle due serie dell'uranio-radio e del torio si trovano sull'aerosol in equilibrio radioattivo fra loro.

Tale supposizione è stata fatta più volte nello studio e nella misura della

radioattività atmosferica ⁽²⁾, ma non risulta provata da alcun dato sperimentale sicuro.

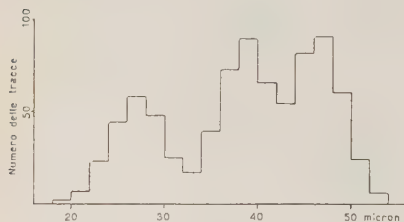
Allo scopo di chiarire questo aspetto del fenomeno, ricorrendo alla precipitazione elettrostatica, ho depositato un sottilissimo strato di particelle solide atmosferiche sulla superficie di una emulsione nucleare Ilford E₁ da 100 μ , in modo da produrre una loro autoradiografia. Il precipitatore è costituito da una punta con estremità emisferica di raggio 0,05 mm, posta a 2 cm di distanza dall'emulsione; tra punta e piano ho applicato una differenza di potenziale di 15 kV, con punta negativa, per 20 minuti. La lastra è rivestita da un lamierino di rame, con un foro del diametro di 24 mm in corrispondenza della punta: la conducibilità della gelatina è sufficiente per trasferire al metallo le cariche elettriche precipitate.

Prima di sviluppare la lastra ho atteso alcuni giorni, allo scopo di permettere a tutti gli elementi depositati di trasformarsi nell'elemento stabile della serie. Nell'emulsione si accumulano le

⁽¹⁾ E. MORASCHINELLI: *Rend. Ist. Lomb.*, **86** (1953) (in corso di pubblicazione).

⁽²⁾ G. ALIVERTI: *Nuovo Cimento*, **8**, 233 (1931); **9**, 313 (1932); J. H. HARLEY: *Nucleonics*, **11**, 12 (Luglio 1953); G. DELIBRIAS e J. LABYRIE: *Journ. Phys. Rad.*, **14**, 407 (1953).

tracce delle particelle α caratteristiche di ogni elemento presente e la misura della loro lunghezza permette di stabilire senza equivoco quali sono questi elementi e in quale proporzione essi si trovano sulle particelle depositate.



Al microscopio ho misurato la lunghezza di un migliaio di tracce (la densità è $14,5$ tracce/ mm^2) ed ho costruito lo spettro dei percorsi delle particelle riportato nella figura. Per determinare il fattore di contrazione della gelatina dopo lo sviluppo, ho assunto come noto il percorso delle α del ThC' ($46,6 \mu$) ⁽³⁾, facilmente riconoscibili per la loro lunghezza.

Dallo spettro risulta evidente la presenza delle particelle α del ThC' , del RaC' ($38,4 \mu$) e di un gruppo con percorso corrispondente al RaA e al ThC (27μ circa).

Tutti gli elementi della serie $\text{RaA} \rightarrow \text{RaB} \rightarrow \text{RaC} \rightarrow \text{RaC}' \rightarrow \text{RaD}$ si trasformano con emissione di una sola particella in RaD , ad eccezione del RaA che

emette una particella nella trasformazione $\text{RaA} \rightarrow \text{RaB}$ ed una seconda particella nella successiva trasformazione $\text{RaC}' \rightarrow \text{RaD}$. Circa la metà di queste coppie di tracce aventi origine in un

punto comune dovrebbe mostrarsi nell'emulsione. Invece su tutta la lastra non è stata osservata una sola di tali coppie: l'esplorazione di altre due lastre, preparate nello stesso modo, ha dato lo stesso risultato.

Ho creduto opportuno eliminare il dubbio di un eventuale effetto di cancellazione dovuto all'ozono prodotto dalla scarica ad effluvio sulle tracce del RaA , che si formano quasi totalmente durante il processo di precipitazione. Ho esposto due lastre alle particelle α dell'ossido di uranio: una delle due è stata poi usata per raccogliere il precipitato della scarica ad effluvio. Dopo lo sviluppo le tracce dell'uranio si sono trovate intatte su ambedue le lastre.

Dai risultati di queste misure sembra di poter concludere che l'ipotesi dell'equilibrio radioattivo fra gli elementi ancorati all'aerosol atmosferico è discutibile. Sembra che il processo di ancoraggio avvenga solo dopo un certo tempo medio in cui l'elemento rimane libero e che gli elementi con periodo breve non abbiano il tempo di ancorarsi all'aerosol prima di trasformarsi.

Colgo l'occasione per ringraziare il prof. O. SPECCHIA per i consigli e l'interessamento mostrato per queste misure.

⁽³⁾ J. P. LONGCHAMPS: *Journ. Phys. Rad.*, **14**, 89 (1953).

The Number of Independent Components of Tensors in Symmetrical Systems.

A. GAMBA

*Istituto di Fisica dell'Università - Torino**Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Torino*

(ricevuto il 29 Luglio 1953)

Reading a series of papers by FUMI⁽¹⁾, our attention was drawn to a paper of BHAGAVANTAM and SURYANARAYANA⁽²⁾, and one of JAHN⁽³⁾ in which these authors give tables of the number N of independent components of tensors in the different crystallographic groups.

In this letter a complete solution of the problem will be given in form of a closed formula.

A general tridimensional tensor of order n transforms under rotation of the reference frame in the same way as the set of the orbital wave functions of a system p^n of n equivalent particles in the p level. This simple remark allows one to use some of the results of atomic and nuclear spectroscopy in order to save work. In particular we use a formula of RACAH⁽⁴⁾ and some results of BETHE on «Termaufspaltung in Kristallen»⁽⁵⁾.

The intrinsic symmetry of a tensor is given in the unitary sense by two numbers J, K ($J \geq K \geq 0$); its number $N_L(J, K)$ of L states by respect to the tridimensional rotation group is given by RACAH⁽⁴⁾. On the other hand the number of times $N_B(L)$ the unit representation of a given crystallographic group is contained in an L state may be found in the quoted paper by BETHE⁽⁵⁾ at least for some particular cases, but can be easily generalized to all crystallographic groups. The final result is then

$$(1) \quad N = \sum_L N_L(J, K) \cdot N_B(L).$$

The sum at the r.h.s. of (1) can be evaluated by elementary algebra and using

(1) F. G. FUMI: *Nuovo Cimento*, **9**, 739 (1952); R. FIESCHI and F. G. FUMI: *Nuovo Cimento*, **10**, 865 (1953). See these papers for references.

(2) S. BHAGAVANTAM and D. SURYANARAYANA: *Acta Cryst.*, **2**, 21 (1949).

(3) H. A. JAHN: *Acta Cryst.*, **2**, 30 (1949).

(4) G. RACAH: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 494 (1949), formula (20).

(5) H. BETHE: *Ann. der Phys.*, (5) **3**, 133 (1929).

the calculus of finite differences. The result is

$$\begin{aligned}
 (2) \quad N = \frac{1}{v} \left\{ (n_0^+ \pm n_0^-) \frac{AB(A-B)}{2} (n_\pi^+ \pm n_\pi^-) \frac{(-1)^A A - (-1)^B B - (-1)^{A+B} (A \cdots B)}{4} + \right. \\
 + (n_{\pi/2}^+ \pm n_{\pi/2}^-) \left(\left[\frac{A+2}{4} \right] - \left[\frac{B+2}{4} \right] - \left[\frac{A-B+2}{4} \right] + \left[\frac{A+1}{4} \right] - \left[\frac{B+1}{4} \right] - \right. \\
 \left. \left[\frac{A-B+1}{4} \right] \right) + (n_{2\pi/3}^+ \pm n_{2\pi/3}^-) \left(\left[\frac{A+1}{3} \right] - \left[\frac{B+1}{3} \right] - \left[\frac{A-B+1}{3} \right] \right) + \\
 + (n_{\pi/3}^+ \pm n_{\pi/3}^-) \left(\left[\frac{A+4}{6} \right] - \left[\frac{B+4}{6} \right] - \left[\frac{A-B+4}{6} \right] + 2 \left[\frac{A+3}{6} \right] - 2 \left[\frac{B+3}{6} \right] - \right. \\
 \left. 2 \left[\frac{A-B+3}{6} \right] + 2 \left[\frac{A+2}{6} \right] - 2 \left[\frac{B+2}{6} \right] + 2 \left[\frac{A-B+2}{6} \right] - \right. \\
 \left. + \left[\frac{A+1}{6} \right] - \left[\frac{B+1}{6} \right] - \left[\frac{A-B+1}{6} \right] \right\},
 \end{aligned}$$

where: v is the order of the crystallographic group (e.g.)
 n_θ^+ is the number of proper rotations by an angle $\pm\theta$ in the c.g.
 n_θ^- is the number of improper rotations by an angle $\pm\theta$ in the c.g.
 $A = J + 2$, $B = K + 1$ specify the intrinsic symmetry, of the tensor

$$[x] = \begin{cases} \text{the maximum integer contained in } x, & \text{for } x \geq 0 \\ 0, & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

the $+$ or $-$ sign must be taken according to the parity of the tensor.

Formula (2) is quite simple, if one thinks that it covers all possible cases, since it is valid for tensors of any order, any intrinsic symmetry, in any crystallographic group. Of course if the tensor has not such a pure intrinsic symmetry to be describable by the two numbers J , K (or A , B), one must first decompose it in pure symmetry tensors using for instance the method of LITTLEWOOD⁽⁶⁾.

As an example we give the formulae one gets from (2) for the particular case of a general unsymmetric tensor of order 4 ($+$ parity) and for a tensor of order 5 ($-$ parity), with the symmetry: $T_{iklmn} = T_{kilmn} = T_{ikmln} = T_{lmik}$ (tensors V^4 and $V[V^2]^2$) in the notation of JAHN⁽³⁾. We get

$$N = \frac{1}{v} \{ 81(n_0^+ + n_0^-) + (n_\pi^+ + n_\pi^-) + (n_{\pi/2}^+ + n_{\pi/2}^-) + 16(n_{\pi/3}^+ + n_{\pi/3}^-) \}$$

and

$$N = \frac{1}{v} \{ 63(n_0^+ - n_0^-) - 5(n_\pi^+ - n_\pi^-) + (n_{\pi/2}^+ - n_{\pi/2}^-) + 4(n_{\pi/3}^+ - n_{\pi/3}^-) \}$$

respectively. Both formulae, of course, check with BHAGAVANTAM's and SURAYNARAYANA's explicit results⁽⁶⁾.

(⁶) D. E. LITTLEWOOD: *Theory of group characters*, 2nd ed., (Oxford, 1950), pp. 94-98.

Effetto Cerenkov in sostanze aeriformi.

A. ASCOLI BALZANELLI (*) e R. ASCOLI

*Istituto di Fisica dell'Università - Torino**Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Torino*

(ricevuto il 4 Agosto 1953)

Uno studio sperimentale dell'effetto Cerenkov nelle sostanze aeriformi presenta uno speciale interesse a causa dei valori dell'indice di rifrazione molto prossimi all'unità. Infatti la rivelazione di tale effetto può permettere di distinguere particelle di velocità diversa e prossima a quella della luce.

Dal punto di vista sperimentale si incontrano notevoli difficoltà a causa del fatto che la quantità di luce prodotta è molto minore che nei mezzi liquidi o solidi. In compenso l'angolo con cui, secondo la teoria, la luce viene emessa, rispetto alla traiettoria delle particelle, è molto più piccolo ed è quindi più facile concentrarla su un opportuno rivelatore.

Le esperienze risultano naturalmente più semplici se l'indice di rifrazione è sufficientemente elevato. Per tale motivo si prestano bene alcuni vapori di sostanze organiche.

Dopo esperienze preliminari, nelle quali si è rivelato un effetto nell'acqua, con spessori sempre decrescenti, fino a 5 cm, abbiamo iniziato le prove per rivelare l'effetto Cerenkov prodotto dai raggi

cosmici in miscele di aria e Cloroformio (¹), ottenute facendo evaporare da 0,4 a 0,8 cm³ di Cloroformio liquido per litro di aria. (Indice di rifrazione variabile da 1,01 a 1,02).

Una prima esperienza con apparecchiatura provvisoria (fig. 1) è stata condotta misurando le coincidenze tra impulsi dati da un fotomoltiplicatore EMI 6260 e da un telescopio costituito da tre gruppi di contatori. Il fotomoltiplicatore era posto sotto una campana entro cui veniva introdotto il vapore di Cloroformio e la concentrazione della luce era agevolata da un tronco di cono speculare internamente, con la base minore coincidente col catodo. Immediatamente sopra il catodo è stato posto uno schermo opaco rimovibile dall'esterno, per schermarlo o meno dalla luce prodotta nel vapore sovrastante. Le misure sono state eseguite alternando brevi prove di ugual durata (generalmente 15^{min}) con lo schermo chiuso e aperto.

Comunichiamo qui i primi risultati così ottenuti con una serie di prove della durata complessiva di 14 ore e 50^{min}.

(*) Scuola di Meccanica Razionale dell'Università, Torino.

(¹) Si è scelto il Cloroformio per l'elevato valore dell'indice di rifrazione e la sicurezza che non formi miscela esplosiva con l'aria.

Frequenza degli eventi senza schermo interposto .	$0,57 \pm 0,036$
Frequenza degli eventi con schermo interposto . .	$0,40 \pm 0,030$
Differenza	$0,17 \pm 0,047$

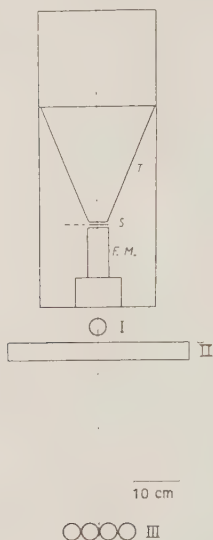


Fig. 1. - Schema dell'apparecchio. *S*: schermo opaco mobile; *T*: tronco di cono speculare internamente; *F.M.*: fotomoltiplicatore EMI 6 260, alimentato con 1650 V; I, II, III: telescopio di contatori; I: unico contatore; II: gruppo di due contatori; III: gruppo di quattro contatori.

Tali misure rivelano quindi nel primo caso un probabile eccesso di eventi, attribuibile a luce prodotta dalle particelle dei raggi cosmici nel vapore sovrastante il catodo.

È stato constatato che la maggior parte degli impulsi che si hanno con lo schermo interposto non è dovuta a coincidenze casuali tra il fondo del fotomoltiplicatore e i contatori, ma piuttosto a coincidenze dovute a particelle che agiscono direttamente sul catodo e attraversano anche i contatori. Infatti, spostando il telescopio di contatori in modo che le particelle da esso rivelate non possano attraversare il fotocatodo, il numero degli eventi si riduce in un rapporto dell'ordine di 5 a 1.

Questa rivelazione diretta di particelle da parte del catodo è forse l'inconveniente maggiore che si incontra con questa apparecchiatura, impedendo di ottenere una differenza più elevata tra le misure con schermo aperto e chiuso.

Tale inconveniente sarà eliminato in un nuovo apparecchio attualmente in costruzione.

Esprimiamo i più vivi ringraziamenti al prof. G. WATAGHIN per il costante incoraggiamento e consiglio.

Siamo grati inoltre al dott. G. GHIGO per la collaborazione nelle prime fasi dell'esperienza.

Nichtlineare pseudoskalare Mesonentheorie.

F. CAP

Institut für theoretische Physik der Universität - Innsbruck

(ricevuto il 4 Agosto 1953)

Es scheint heute ziemlich sicher zu sein, daß das π -Meson pseudoskalar und für die Kernkräfte verantwortlich ist ⁽¹⁾. Weiters ist bekannt, daß die Potentiale zweiter und vierter Ordnung der symmetrischen pseudoskalaren Theorie in pseudovektorieller Kopplung für alle Prozesse niedriger Energie ausreichen ⁽²⁾. Nur bei den Sättigungsbedingungen und bei den Prozessen hoher Energie ⁽³⁾ führt die pseudoskalare symmetrische Theorie zu Schwierigkeiten. Dies dürfte nicht nur auf die statische Näherung, sondern auch auf eine Modifikation der Feldgleichungen für kleine Abstände zurückzuführen sein. So hat JASTROW ⁽⁴⁾ gezeigt, daß durch Annahme eines « hard core » die Ladungsunabhängigkeitshypothese für hohe Energien gerettet werden kann. Während JASTROW nur mit phänomenologischen Potentialen arbeitet,

schlug TAKETANI ⁽⁵⁾ vor, « außen » mesonische Potentiale (pseudoskalar - symmetrisch) und nur *innen* phänomenologische Potentiale zu verwenden. Es erschiene dem Verf. als ein Fortschritt, wenn es gelänge, auch für die innere Region, für den hard core etc., mesonische Potentiale zu verwenden. Dies bedingt eine nichtlineare Mesonentheorie.

Vor nichtlinearen Theorien hat man sich bisher mit wenigen Ausnahmen (SCHIFF ⁽⁶⁾, PARZEN ⁽⁷⁾, HEISENBERG ⁽⁸⁾, u.a.), gescheut, da bei solchen Feldern die Quantisierung mit Schwierigkeiten verbunden ist. Nun hat aber THIRRING ⁽⁹⁾ gezeigt, daß man schon aus Gründen der Renormalisierbarkeit mit mindestens einem nichtlinearen Term zu rechnen hat andererseits zeigten PAULI ⁽¹⁰⁾ — und

⁽⁵⁾ TAKETANI: *Prog. theor. Phys.*, **6**, 581 (1951); MACHIDA: *Prog. theor. Phys.*, **7**, 57 (1952).

⁽⁶⁾ L. I. SCHIFF: *Phys. Rev.*, **50**, 748 (1936); **84**, 1, 10 (1951); **80**, 137 (1950).

⁽⁷⁾ G. PARZEN und L. I. SCHIFF: *Phys. Rev.*, **74**, 1564 (1948).

⁽⁸⁾ W. HEISENBERG: *Zeits. f. Phys.*, **113**, 61 (1939).

⁽⁹⁾ W. E. THIRRING: *Zeits. f. Naturforschung*, **7a**, 63 (1952).

⁽¹⁰⁾ W. PAULI: *Meson Theory of Nuclear Forces* (New York, 1946).

⁽¹⁾ W. HEISENBERG: *Kosmische Strahlung* (Berlin, 1953).

⁽²⁾ MACHIDA: *Progr. of theor. Phys.*, **6**, 904 (1951); TAKETANI: *Prog. theor. Phys.*, **6**, 638 (1951); **5**, 740 (1950); H. FESHBACH und J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **84**, 194 (1951); K. A. BRUECKNER: *Phys. Rev.*, **79**, 641 (1950).

⁽³⁾ M. M. LÉVY: *Phys. Rev.*, **84**, 441 (1952); E. SEGRÉ: *Phys. Rev.*, **83**, 923 (1951).

⁽⁴⁾ R. JASTROW: *Phys. Rev.*, **81**, 165 (1951).

schon früher BETHE⁽¹¹⁾, daß man zur Ableitung des Kernkraftpotentials gar nicht quantisieren muß — dies ist erst nötig, wenn man sich für die korpuskularen Eigenschaften (magnetisches Moment u.ä.) des Mesonenfeldes interessiert. Es erscheint daher — und auch anderen Erfahrungen zufolge⁽¹²⁾ — nötig zu sein, nichtlineare Mesonentheorien für inneres und äußeres Gebiet zu entwickeln. Für das äußere Gebiet $r > \hbar/m_N c$ (m_N Nucleonenmasse) müssen diese Theorien in die lineare Theorie übergehen, um die Daten niederer Energie und das vom inneren Potential praktisch unabhängige⁽¹³⁾ Quadrupolmoment des Deuterons zu erhalten.

Die im folgendem vorgeschlagene pseudoskalare Mesonentheorie unterscheidet sich von der üblichen dadurch, daß sie zwischen einem Feld f_k ($k = 1 \dots 4$) und einer Erregung φ_l ($l = 1 \dots 4$) unterscheidet. Feld und Erregung hängen wie in der klassischen Elektrodynamik zusammen durch

$$(1) \quad f_k = \varepsilon(\varphi_k) \cdot \varphi_k$$

wo im Sinne von BORN⁽¹⁴⁾

$$\varepsilon = \varepsilon(\varphi_k).$$

⁽¹¹⁾ H. BETHE: *Phys. Rev.*, **57**, 260, 390 (1940), s. auch F. CAP: *Acta Phys. Austr.*, **6**, 35 (1952) und *Zeits. f. Phys.*, im Erscheinen (Zur Kopplung von Diracfeld und Bosonfeld).

⁽¹²⁾ K. A. BRUECKNER und F. LOW: *Phys. Rev.*, **83**, 461 (1951) spricht ebenfalls für Abstosung für kleine Distanzen.

⁽¹³⁾ *Prog. theor. Phys.*, **6**, 581 (1951); **5**, 523 (1950).

⁽¹⁴⁾ M. BORN: *Proc. Roy. Soc., A* **143**, 410 (1933), s. auch F. CAP: *Acta Phys. Austr.*, **6**, 135 (1952).

Die Feldgleichung (entsprechend der zweiten Maxwellgleichung lautet $f_{k,l} - - f_{l,k} = 0$ woraus sofort

$$(2) \quad f_k = \frac{1}{\kappa} A, k, \quad \kappa = \frac{mc}{\hbar},$$

die bekannte Gleichung des pseudoskalaren Mesons, folgt. Für die Erregung gilt (analog der 1. Maxwellgleichung)

$$(3) \quad \varphi_{l,l} = \kappa A + Q,$$

wo Q z.B. (statisch) $\sigma_k \partial / \partial x_k \psi^* \psi$ ist, und A der Pseudoskalar.

Daraus folgt schließlich mit $\varepsilon(\varphi) = 1/g(\varphi)$ und (1), (2),

$$(4) \quad g(\varphi_k) \cdot \square A - \kappa^2 A + A, l \cdot g, l = \kappa Q,$$

oder

$$(5) \quad \varphi_{l,l,k} - \kappa^2 \varepsilon(\varphi_k) \cdot \varphi_k = Q, k.$$

Für g bzw. $\varepsilon \sim 1$ ergeben sich die bekannten linearen Theorien. Die Funktion g kann man entweder durch Anpassung an experimentelle Ergebnisse gewinnen oder aus theoretischen Überlegungen ableiten. Die Quellfunktion Q kann wie üblich oder nach der Spinortheorie des Verf.⁽¹⁵⁾ bestimmt werden. Über alle diese Dinge soll später ausführlich berichtet werden.

⁽¹⁵⁾ F. CAP: *Modifizierte Spinortheorie der Elementarteilchen*, eingereicht *Zeit. f. Naturforschung*.

The Ground State of Cl^{34} . (*)

D. C. PEASLEE

Columbia University - New York, U.S.A.

(ricevuto il 5 Agosto 1953)

A recently established ⁽¹⁾ β -decay scheme for Cl^{34} indicates the following features: the ground state of Cl^{34} is 0^+ , the first excited state at 0.145 MeV is 3^+ ; the ground state undergoes β -decay to the 0^+ ground state of S^{34} with $ft \sim 2650$.

If these features are correct, they provide at least two arguments for believing that the isotopic spin of the Cl^{34} ground state is $T=1$. Theoretically, all the simplest and most successful nuclear coupling schemes indicate ⁽²⁾ that a low-lying 0^+ level should have $T=1$. On j - j coupling, the configuration $(d_{3/2})^2$ produces states 1^+ , 3^+ with $T=0$, states 0^+ , 2^+ with $T=1$. With L - S coupling for two d -nucleons, the $T=0$ states are $^3\text{S}_1$, $^3\text{D}_{123}$, $^3\text{G}_{345}$, $^1\text{P}_1$, $^1\text{F}_3$; the $T=1$ states are $^3\text{P}_{012}$, $^3\text{F}_{234}$, $^1\text{S}_0$, $^1\text{D}_2$, $^1\text{G}_4$. Thus, on any coupling scheme intermediate between these extremes, the 0^+ states must have symmetry properties corresponding to $T=1$. Of course, we could construct a 0^+ , $T=0$ state using more complex configurations with a larger number of

nucleons; present evidence is against the predominance of such complex configurations in the lowest lying states of light nuclei.

The experimental argument for $T=1$ in the Cl^{34} ground state is even stronger. The $0^+ \rightarrow 0^+$ β -transition is restricted to the Fermi-type interaction, which has the additional selection rule $\Delta T=0$. Since the ground state of S^{34} has $T_z=1$, and presumably therefore $T=1$, the 0^+ ground state of Cl^{34} must also be $T=1$.

The nucleus Cl^{34} hence appears as a remarkable exception. It is the only $N=Z$ nucleus now known to have $T \neq 0$ in its ground state, violating the general rule that all light nuclei show $T=T_z=T_{\min}$ in their ground states. Cl^{34} is just barely an exception, because the 3^+ level is most likely to have $T=0$ on any coupling scheme and only fails to be the ground state by about .15 MeV, a relatively small interval in light nuclei.

If the decay scheme and interpretation of Cl^{34} are correct, therefore, we should inquire what causes might produce $T=1$ in the ground state. One possibility is the perturbation of Coulomb forces. These forces produce configuration interactions between states of the

(*) Work supported by the research program of the U.S. Atomic Energy Commission.

¹⁾ W. ARBER and P. STÄHELIN: *Helv. Phys. Acta*, **26**, 433 (1953).

²⁾ I. TALMI: *Pittsburgh Conference on Nuclear Physics*, June, 1953.

same J and different T . They might conceivably invert the normal order of the $T=0$, $T=1$ states, since the Coulomb potential of a proton in Cl^{34} exceeds the spacing of low-lying levels. If those forces were strong enough to change the level order, however, they should entirely destroy the validity of T as a quantum number. The 0^+ ground state should therefore represent an admixture of $T=0$, $T=1$, and $T=2$ configurations in comparable parts. Since $T \geq 1$ for the ground state of S^{34} , the $T=0$ part of the Cl^{34} ground state cannot β -decay to S^{34} because of the $\Delta T=0$ restriction. The nuclear matrix element should therefore be reduced and the ft value correspondingly increased. The measured $ft \sim 2650$ corresponds⁽³⁾, however, to a nuclear matrix element of $|\int 1|^2=2$, implying perfect «overlap» between the ground state wave functions of Cl^{34} and S^{34} . This fact makes it very very unlikely that Coulomb forces can be mainly responsible for the Cl^{34} anomaly.

We are thus led to suppose that the 0^+ , $T=1$ ground state of Cl^{34} represents the effects of the nuclear forces themselves. It is difficult to understand this result on the basis of good L - S coupling. There, the most symmetric and hence lowest energy configurations are 3L_J , with $L=0, 2, 4$. These configurations are all $T=0$ and do not include $J=0^+$; the most likely values are $J=1^+$ and $J=3^+$. On the other hand, j - j coupling does not so readily exclude 0^+ , $T=1$. In j - j coupling the two $d_{3/2}$ nucleons can couple to give $J=0^+$, $T=1$, and $J=1^+, 3^+, T=0$. Which states are lowest depends on the residual coupling between l_1, l_2, s_1 and s_2 for the nucleons. If the $s_1 s_2$ coupling is dominant, the spins tend to form a triplet

state, favoring $J=3^+$ as the lowest level⁽⁴⁾. If, on the other hand, $l_1 l_2$ coupling is dominant, an $L=0$ state should be favored, or hence $J=0^+$. And if $l_1 l_2$ and $s_1 s_2$ couplings are of comparable importance $J=0^+$ and $J=3^+$ may be very close together, the exact sequence being more or less accidental in a first-order calculation.

It thus seems possible to make a picture of the Cl^{34} ground state in which the coupling is basically j - j , perturbed by $l_1 l_2$ and $s_1 s_2$ interactions of roughly equal magnitudes. The only other odd-odd $N=Z$ nuclei with well studied level structures ($\text{L}^6, \text{B}^{10}, \text{N}^{14}$, possibly F^{18}) do not show this behavior, which is most probably because of a greater ascendancy of L - S coupling for these lighter nuclei.

Another indication that j - j coupling is more pronounced for Cl^{34} than for these lighter nuclei is the fact that the lowest $T=0$ state is $J=3^+$ instead of $J=1^+$. As remarked in the previous paragraph, j - j coupling favors $J=2j^+$ for the lowest $T=0$ state, while L - S coupling favors 3S_1 or $J=1^+$. For the $p_{3/2}$ and $d_{5/2}$ subshells, L - S coupling seems to predominate at the beginning of the subshell and j - j coupling at the end⁽⁵⁾. For the $d_{3/2}$ subshell, however, the $T=0$ states indicate j - j coupling at both the beginning and end of the subshell (K^{38} has presumably $J=3^+$, $T=0$ in its ground state). Hence, there appears to be a general tendency for j - j coupling to become more predominant with increasing A .

The author wishes to thank P. STÄHELIN for a private communication on this subject.

⁽⁴⁾ L. W. NORDHEIM: *Phys. Rev.*, **78**, 294 (1950).

⁽³⁾ O. KOFOED-HANSEN and A. WINTHER: *Phys. Rev.*, **86**, 428 (1952).

⁽⁵⁾ R. W. KING and D. C. PEASLEE: *Phys. Rev.*, **90**, 1001 (1953).

Preliminary Research on V_1^0 Events in Emulsions.

E. AMALDI, C. CASTAGNOLI, G. CORTINI and A. MANFREDINI

Istituto di Fisica dell'Università - Roma

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Roma

(ricevuto il 7 Agosto 1953)

Although the nuclear emulsions present well known disadvantages with regard to cloud chambers as detector of V^0 events, we thought it worthwhile to do a preliminary investigation on the possibility of recognizing and measuring this type of decay in plates exposed at high altitude on the occasion of the International Expedition held in Sardinia on 1952. A rough evaluation based on the experimental results of cloud chamber work shows that the number of V^0 events to be expected in a plate of area $5 \times 10 \text{ cm}^2$ and thickness 600μ exposed for 7 hours at about 25 km, is of the order of 10.

Before starting an extensive investigation necessarily based on an unbiased study of all two prongs stars, we have made some preliminary measurements intended to establish only the practical possibility of recognizing and measuring V^0 events. We report here, very briefly, on the results of this preliminary investigation.

In consideration of the fact that in plates scanned without special attention to two prongs stars, a rather large and unknown percentage of these events has certainly escaped observation, we have renounced, for the moment, the collection of any information about the fre-

quency of the various types of V^0 events and we have restricted our research to V_1^0 events corresponding to a neutral particle decaying into a proton and a negative pion with a Q of 37 MeV. From the kinematics of the reaction it is possible to deduce a graphical rule based on rough measurements of the grain density of the two tracks and their angle Φ , which eliminates a large number of the two prongs stars not due to V_1^0 and less than a half of these latter. The principle on which this selection rule is based is that of considering only those V_1^0 which decay in a direction forming a fairly large angle in the centre of gravity frame of reference ($\Theta \gtrsim 60^\circ - \Theta \lesssim 120^\circ$) with the direction of motion of the decaying particle in the laboratory frame of reference. In fact one can note that in the great majority of the V_1^0 events corresponding to a value of $\Theta \lesssim 30^\circ$, one of the two prongs is so fast that the corresponding particle cannot be recognized by grain density and scattering measurements.

We have examined 872 two prongs stars. Of these 52% have been disregarded because they show some evidence of recoil, 35% because both prongs were due to protons. Of the remaining

events, 20% have been disregarded because one or both prongs were too short or showed too large an angle of dip into the emulsion to allow good measurements and 40% because the events did not satisfy the selection rule mentioned above. For the remaining 40% i.e. 5.4% of the initial number of stars ($45/832 = 5.4\%$) the range or the grain density and the mean angle of scattering have been measured for both prongs.

8 of the measured two prongs stars are certainly formed by a proton and a Λ -meson (π or μ). The experimental results concerning these 8 events are collected in table I where we give also the corresponding Q value obtained by the obvious relations

$$M^2 = m_p^2 + m_\pi^2 + 2W_p W_\pi - 2p_p p_\pi \cos \Phi$$

$$Q = M - (m_p + m_\pi).$$

The errors given are the standard deviations of the measurements of the mean angle of scattering. While the events

1, 2, 5, 6 give a value of Q very close to that expected for a V_1^0 decay, event 3 which is measured with rather good accuracy gives a rather low value. For event 4 we only can state a lower limit for the value of Q because the proton goes out of the emulsion after 260 μ . Finally events 7 and 8 give values of Q too high to be interpreted as V_1^0 decay with $Q \cong 37$. The events of table I could be due entirely or in part to processes of the following types

$$(a) \quad n + n \rightarrow p + \pi^- + n$$

$$(b) \quad \pi^- + n \rightarrow \pi^0 + p$$

$$(c) \quad \gamma + n \rightarrow p + \pi^-$$

where the neutron at rest before the collision is contained in a nucleus, and possibly on its surface.

A detailed discussion of the processes taking into account the volume of scanned emulsion shows that we have to expect about 2 events of type (b) among the 8 collected in table I.

TABLE I.

Event	Meson π			Proton p			Φ	P (MeV/c)	Q (MeV)
	Range(μ) t (total) o (obs.)	Mean angle scattering $\hat{\theta}_{100\mu}$	Energy (MeV)	Range(μ) t (total) o (obs.)	Mean angle scattering $\hat{\theta}_{100\mu}$	Energy (MeV)			
1	2790 (o)	$0.41 \pm .09$	$34 \begin{smallmatrix} +11 \\ -7 \end{smallmatrix}$	192 (t)	—	5.36	96°	$136 \begin{smallmatrix} +13 \\ -8 \end{smallmatrix}$	$29 \begin{smallmatrix} +13 \\ -5 \end{smallmatrix}$
2	1690 (o)	$0.37 \pm .09$	$38.5 \begin{smallmatrix} +13.5 \\ -8.2 \end{smallmatrix}$	521 (o)	$1.30 \pm .40$	$10 \begin{smallmatrix} +4 \\ -2.5 \end{smallmatrix}$	97°	$167 \begin{smallmatrix} +28 \\ -24 \end{smallmatrix}$	$35 \begin{smallmatrix} +14 \\ -8 \end{smallmatrix}$
3	1180 (t)	—	6.2	900 (o)	$0.21 \pm .05$	$62 \begin{smallmatrix} +20 \\ -12 \end{smallmatrix}$	120°	$329 \begin{smallmatrix} +62 \\ -39 \end{smallmatrix}$	$20.4 \begin{smallmatrix} +3.8 \\ -2.3 \end{smallmatrix}$
4	2400 (o)	$0.80 \pm .18$	$18.6 \begin{smallmatrix} +6 \\ -5 \end{smallmatrix}$	> 260	—	—	117°	—	> 20
5	1610 (o)	$0.30 \pm .06$	$47.5 \begin{smallmatrix} +12.5 \\ -8.5 \end{smallmatrix}$	684 (t)	—	10.8	84°	$200 \begin{smallmatrix} +15 \\ -10 \end{smallmatrix}$	$40 \begin{smallmatrix} +11 \\ -7 \end{smallmatrix}$
6	1380 (o)	$0.40 \pm .08$	$35 \begin{smallmatrix} +9.5 \\ -6.5 \end{smallmatrix}$	2300 (o)	$0.50 \pm .08$	$25.5 \begin{smallmatrix} +4.5 \\ -3.5 \end{smallmatrix}$	90°	$245 \begin{smallmatrix} +25 \\ -17 \end{smallmatrix}$	$34 \begin{smallmatrix} +10 \\ -5 \end{smallmatrix}$
7	7340 (o)	$0.12 \pm .02$	$31 \begin{smallmatrix} +29 \\ -20 \end{smallmatrix}$	193 (t)	—	5.36	93°	$248 \begin{smallmatrix} +30 \\ -22 \end{smallmatrix}$	$108 \begin{smallmatrix} +25 \\ -13 \end{smallmatrix}$
8	1130 (o)	$0.17 \pm .05$	$88 \begin{smallmatrix} +47 \\ -23 \end{smallmatrix}$	99 (t)	—	3.50	140°	$129 \begin{smallmatrix} +53 \\ -27.5 \end{smallmatrix}$	$92 \begin{smallmatrix} +40 \\ -33 \end{smallmatrix}$

Therefore we conclude that the events 1, 2, 3, 4, 5, 6 are probably due to V_1^0 de-

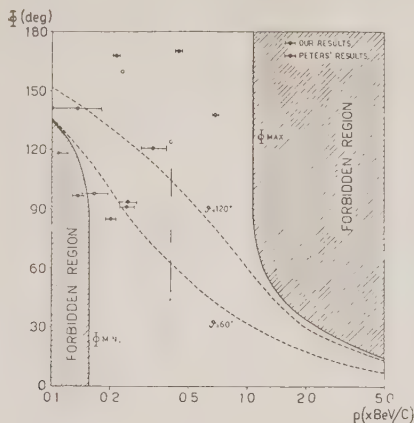


Fig. 1.

cays while the events 7 and 8 are almost certainly due to some other process.

If such an interpretation is correct it is rather interesting to plot our results on the graph of fig. 1 where for each value of the angle Φ is given the allowed interval of the momentum P of the V_0^0 (1).

(¹) J. WILSON: *Progress in Cosmic Rays Physics* (Amsterdam, 1952), p. 97.

While the cloud chamber results give points distributed mainly in the region corresponding to $P > 400$ MeV/c and $\Phi < 90^\circ$, our points are mainly in the region of lower momenta and higher values of Φ .

The Bombay group has done a similar research based on the search for pions stopping in stripped emulsions and emitted from a two prongs star ⁽²⁾. The results of these authors fall in a different region of fig. 1 showing the importance of the method adopted in looking for V_0^0 events. Our results as well as those of other authors ⁽³⁾ along similar lines have been presented to the Conference of Bagnères-de-Bigorre.

A few more isolated cases of V^0 events have been observed in emulsion by other authors (^{4,5,6}).

(2) D. LAL, YASH PAL and B. PETERS: *Properties of Heavy Unstable Particles*. Communication of B. PETERS at the International Congress of Cosmic Rays of Bagnères-de-Bigorre, 1953.

(3) M. YASIN: International Congress on Cosmic Rays of Bagnères-de-Bigorre, 1953.

(¹) W. D. HOPPER and S. BISWAS: *Phys. Rev.*, **80**, 1099 (1950).

(2) A. BONETTI, R. LEVI-SETTI and B. LOCATELLI: International Congress on Cosmic Rays of Bagnères-de-Bigorre, 1953.

(¹) M. TEUCHER: International Congress on Cosmic Rays of Bagnères-de-Bigorre, 1953.

On the Positive Excess of Mesons of High Energy.

E. BERETTA, I. FILOSOFO, B. SOMMACAL

Istituto di Fisica dell'Università - Padova

G. PUPPI

*Istituto di Fisica dell'Università - Bologna**Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova*

(ricevuto il 17 Agosto 1953)

In this letter we wish to give the results of the first series of measurements on the positive excess of high energy

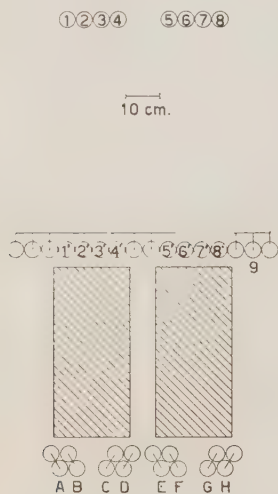


Fig. 1.

μ -mesons made underground with the arrangement illustrated in fig. 1. This apparatus, which discriminates between positive and negative mesons by means

of two magnetised iron cores, is not essentially different from that which has been used in previous measurements of the excess at sea-level ⁽¹⁾. The frequency of mesons of the two signs are obtained by counting coincidences N_1 (11'C, 22'D, 77'E, 88'F) and N_2 (33'A, 44'B, 55'G, 66'H) for the two directions of the magnetic field; events of type N_1 and N_2 are each in anticoincidence with double coincidences between any two counters 1', 2', 3', 4', ..., 8', 9', or with double coincidences between any counter A, B, G, H, and any counter C, D, E, F. The measurements have been made at different depths for the same energy range. Taking together the total intensity and differential intensity, and taking into account relationship between range and energy for μ -mesons ⁽²⁾ it is possible to define for each depth, the equivalent air thickness in g/cm², and the position of the corresponding differential energy band in the spectrum of the mesons at sea-level.

⁽¹⁾ I. BERETTA, I. FILOSOFO and B. SOMMACAL: *Nuovo Cimento*, **10**, 317 (1952).

⁽²⁾ *Progress in Cosmic Rays*, Cap. VII (Amsterdam, 1951).

The results obtained have been summarised in table I and have been derived for each thickness from a series of measurements made at different times, but all in good agreement among themselves.

tons and background used by OWEN and WILSON, it allows us to state that any new fact would be negligible in the μ -meson spectrum, from sea-level to the depth corresponding to our measure-

TABLE I.

g/cm^2	1 400	2 400	4 050
mean energy of Band in GeV	3,2	5,5	9,5
(P)	66 392	15 635	7 387
(N)	52 441	12 439	5 922
P/N	$1,266 \pm 0,006$	$1,257 \pm 0,013$	$1,247 \pm 0,02$
%	$23,4 \pm 0,4$	$22,7 \pm 1,1$	$22,0 \pm 1,7$

Comparing these results with those obtained by OWEN and WILSON⁽³⁾ at sea-level with the high precision spectrograph one can draw first conclusions. As can be seen in fig. 2, the two series

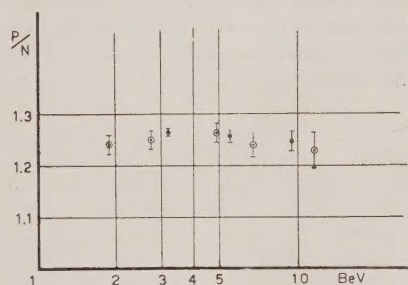


Fig. 2.

of values of P/N agree perfectly. In our experiment we record only μ -mesons (particles absorbed by range), and while this agreement demonstrates the validity of the procedure for subtraction of pro-

tons and background used by OWEN and WILSON, it allows us to state that any new fact would be negligible in the μ -meson spectrum, from sea-level to the depth corresponding to our measure-

ments. If one adds this evidence to that which appears from the comparison of the absolute intensity at sea-level and the absolute intensity underground⁽⁴⁾, one can be almost certain that, as for as the energy interval investigated is concerned, one finds underground only those which pass sea-level and are slowed down by electromagnetic interaction only.

From the examination of the results, and considering that the zone of the spectrum between 5 and 10 GeV is little subject to the effect of dilution of the excess typical of low energies⁽⁵⁾ we can deduce that the mean excess is a very slow function of the energy of the mesons.

It is also possible to make a reasonable estimate of the mean multiplicity of the production of π -mesons of a certain energy, assuming that each μ -me-

⁽³⁾ B. G. OWEN and J. G. WILSON: *Proc. Phys. Soc.*, A **64**, 417 (1951).

⁽⁴⁾ Cfr. ⁽²⁾ and private communication from Manchester group.

⁽⁵⁾ P. BASSI, E. CLEMENTEL, I. FILOSOFO and G. PUPPI: *Nuovo Cimento*, **6**, 494 (1949) and *Progress in Cosmic Rays* (Amsterdam, 1951), Chap. VI.

son comes from a π or K-meson. Writing A/R as the ratio between the collision and absorption lengths of the primary radiation, and Φ as the fraction of protons in the primary radiation, the multiplicity at the first collision is approximately equal to

$$n(\varepsilon) = \frac{2\Phi}{\delta(\varepsilon)} \left(\frac{A}{R} \right) \frac{\sigma_{pp}}{\sigma_{pp} + \sigma_{pN}},$$

one thus finds that if $\sigma_{pp} = \sigma_{pN}$ the mean multiplicity with which charged π -mesons of 10 GeV are produced in the collision of a primary with a nucleus in the atmosphere, lies between 2 and 4, according to the value that is assigned, within reasonable limits, to the ratio A/R , for which no experimental data exist. However such modest values for the mean multiplicity are not yet critical for the theory of production, because the energies so far investigated are not sufficiently high.

We also wish to point out the fact that the data for the absolute intensity of μ -mesons and for their positive excess, together with the knowledge of the primary spectrum and of the generative processes constitute, the elements with

which one will be able to formulate a balance-sheet for very high-energy phenomena in the atmosphere. At present not only is the primary spectrum uncertain, but also many elements of the generative phenomena, and principally: the proportion of charged π -mesons, neutral π -mesons and heavy mesons (K), the inelasticity of the first collision and the equality of the collision cross-sections for proton-proton and proton-neutron for the production of mesons at high-energy.

We can however indicate a series of values of the parameters suggested by experiment. With $\Phi = 0.85$ $\pi^0/\pi^\pm = 1/2$, inelasticity = 0.2 one obtains a primary spectrum in the region of 100 GeV of the form $N(E) = (100/E)^{1.65} \cdot 1.15 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1} \cdot \text{sterad}^{-1}$, which, when extrapolated, agrees very well in the zone of 10 GeV with the spectrum inferred from the latitude effect. The substitution of π -mesons by K-mesons would require a greater inelasticity for the same primary spectrum.

Measurements are continuing at greater depths with an arrangements of increased counting rate. In a future publication all the consequences of the current experiment will be more fully discussed.

ERRATA-CORRIGE

G. E. TAUBER and TA-YOU WU: The J Values of States in Configurations $(j)^n$,
Nuovo Cimento, **10**, 677 (1953).

TABLE I.

j	n	J	J
9/2	4,6	0(2), (4,3) 5(1)	instead of 4(2), 5(2)
11/2	5,7	1/2(1), 5/2(3), 7/2(4), 9/2(4)	instead of 1/2(2), 5/2(2), 7/2(2), 9/2(6).

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA
